Etude de problèmes liés aux fluides compressibles et aux plasmas

Rémy Sart

N^o d'ordre : D.U.

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

(U.F.R. Sciences et Technologies)

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N^o :

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

(Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

par

Rémy SART

Diplomé d'Etudes Approfondies

Etude de problèmes liés aux fluides compressibles et aux plasmas

Soutenue publiquement le 17 décembre 2007, devant la commission d'examen

Messieurs

Jean Claude SAUT	*Professeur, Paris XI*	Président
Emmanuel GRENIER	*Professeur, Lyon*	Rapporteur
Eric SONNENDRÜCKER	*Professeur, Strasbourg*	Rapporteur
Jacques SIMON	*D.R., Clermont – Fd*	Examinateur
Didier BRESCH	*D.R., Chambéry*	Directeur de thèse
Bernard SARAMITO	*Professeur, Clermont – Fd*	Directeur de thèse

Remerciements

J'aimerais bien évidemment débuter cette page en adressant toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Bernard Saramito et Didier Bresch pour tout le temps qu'ils m'ont accordé pendant ces trois années mais aussi pour la sympathie qu'ils me témoignent.

Je remercie Emmanuel Grenier et Eric Sonnendrücker d'avoir accepté de rapporter ma thèse et Jean-Claude Saut d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Merci à Jacques Simon, également membre du jury, que j'ai souvent sollicité pour mes soucis de rédaction et de mise en page. Je remercie plus généralement tous ceux avec qui j'ai pu échanger des idées et qui ont donc de près ou de loin participé à mes travaux, je pense aux membres du Laboratoire de Mathématiques mais aussi à ceux que j'ai croisés à l'occasion de colloques.

Sans pouvoir, malheureusement, recenser tous ceux qui participent à rendre meilleur notre environnement de travail, je pense aux services administratifs et pédagogiques de l'Université Blaise Pascal, je voudrais adresser un merci particulier aux secrétaires, surtout Noëlle Rouganne qui chouchoute depuis toujours ses étudiants, à Annick Montori qui s'investit pour nos recherches d'ouvrages, à Damien Ferney et Cédric Barrel pour tous les petits désordres informatiques, je remercie enfin Jérôme Lemoine auprès duquel j'ai souvent pu trouver réponses à mes questions.

Une pensée pour ceux que j'ai rejoints en doctorat et qui ont poursuivi leur chemin depuis, Mathieu Gourcy, Ingrid Violet, Mamadou Sy, Fabrice Blache, Benoît Testud, Liang Zhen Leï. J'ai apprécié leur sympathie et je salue leur accueil chaleureux lors de mon arrivée au Laboratoire.

Les bons moments passés en compagnie des breuziches du BBF, sur le terrain, pendant les soirées poker ou autres sessions WTC m'ont permis d'oublier les Mathématiques de temps en temps. Leur amitié a beaucoup d'importance pour moi et mon équilibre.

Je remercie enfin et surtout les personnes qui partagent ma vie et qui comptent beaucoup pour moi. Leur soutien inconditionnel me permet de progresser sereinement dans la voie que j'ai choisie.

Merci à mes parents, mon frère Frantz, ma soeur Marilyn qui me portent un intérêt immense et m'encouragent à continuer ainsi. Je suis heureux de pouvoir leur dire ici que je les aime et que je suis fier d'eux. J'ai une pensée pour ma famille en général et je souhaite à mon grand-père et mes deux grands-mères d'aller mieux. Pour finir, merci à Elodie qui m'a accompagné tout au long de ce travail, j'espère la voir à ma place dans quatre ans...

Introduction

Le travail de cette thèse s'organise autour du thème majeur des écoulements compressibles dont les premières bases furent posées par le mathématicien français C.–L. Navier et clarifiées par son homologue anglais G.G. Stokes quand ils proposèrent la modélisation des écoulements de fluides dans les années 1820. Depuis près de deux siècles, les idées se bousculent autour de la résolution des équations alors baptisées "de Navier-Stokes compressibles" et il a fallu attendre la fin du 20ème siècle pour disposer d'une première approche rigoureuse proposée par P.–L. Lions. Sa théorie complète montre l'existence de solutions faibles globales en temps dans un espace de dimension $N \geq 2$ en régime isentropique pour des conditions initiales générales. Sur le même chemin, on rencontre par exemple E. Feireisl et ses collaborateurs, généralisateurs de l'étude de P.–L. Lions pour des constantes adiabatiques $\gamma > N/2$, à la fois en préservant les idées principales mais tirant également profit d'une approche nouvelle sur certains points. Bien sûr beaucoup d'autres ont apporté leur pierre à l'édifice et on ne saurait en citer quelques uns sans mettre de côté certains aspects de ces problèmes qui se diversifient constamment selon les conditions et les caractéristiques des fluides étudiés. La particularité du modèle proposé par Navier et Stokes est la prise en compte des effet de la viscosité. Introduisons d'ores et déjà ce système et faisons quelques commentaires.

La première équation est appelée équation de *conservation de la masse*, ou encore équation de continuité, elle s'écrit :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0,$$

La deuxième traduit la *conservation de la quantité de mouvement*, on l'appelle aussi équation des moments :

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\, u) = f_{ext}.$$

Les variables ϱ et u représentent respectivement la densité et la vitesse du fluide. De manière générale, p est un terme de pression pouvant dépendre de plusieurs quantités selon les contextes. Enfin, μ et λ sont des coefficients de viscosité, il apparait ainsi dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement deux termes de diffusion modélisant les effets de petites échelles. En effet, la viscosité traduit les forces de friction au niveau microscopique. Pour se donner une idée, on pourrait se représenter de telles forces comme celles qui obligent le miel à couler lentement. D'autre part, de tels termes diffusifs ont une influence principalement au bord du domaine dans lequel se trouve le fluide ou, par exemple, à proximité d'éventuels obstacles. La viscosité a de ce fait une grande influence sur le profil d'un écoulement. Mis en évidence en 1883 par O. REYNOLDS, le nombre de Reynolds caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Lorsque ce nombre est petit, l'écoulement est régulier (on parle d'écoulement laminaire), lorsqu'il est grand, l'écoulement est plutôt instable ou turbulent. Un sujet intéressant est d'ailleurs celui de la transition entre ces différentes propriétés des écoulements, par exemple lorsque le nombre de Reynolds augmente, on peut étudier les phénomènes de turbulence en se basant sur la théorie des systèmes dynamiques (bifurcations). La prise en compte de la viscosité d'un fluide semble donc essentielle dans la modélisation d'un écoulement et peut faire l'objet de diverses hypothèses. De manière simplifiée, on distinguera deux cas de figure dans ce mémoire, les viscosités constantes ou au contraire dépendantes des caractéritiques du fluide, et plus particulièrement de sa densité. L'hypothèse d'une viscosité dépendante de la densité du fluide crée des difficultés à travers les non-linéarités mais semble être plus réaliste. Pour quelques idées sur l'importance de la prise en compte des effets visqueux, on peut par exemple renvoyer aux travaux de D. SERRE donnés en réfèrence.

Dans une **première partie**, on considère des modèles avec viscosités constantes. On s'intéresse particulièrement à l'existence de solutions faibles pour un modèle de fluides compressibles soumis à un champ magnétique extérieur B. Le modèle est donc constitué des équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoute les lois de l'électromagnétisme. On prend donc en compte l'influence de B dans la conservation de quantité de mouvement par l'ajout d'une force extérieure (force de Lorentz)

$$f_L = \mathrm{rot} B \wedge B$$

et en complétant le système avec les lois suivantes, issues des équations de Maxwell :

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}(\eta \mathrm{rot} B) = 0, \quad \mathrm{div} B = 0$$

Le coefficient η est la résistivité du fluide, il jouera un rôle tout aussi important que les coefficients de viscosité. Il induit précisément la régularité du champ magnétique et il sera également question de sa dépendance en densité dans les parties suivantes. Le résultat d'existence de solutions faibles globales en temps présenté dans le chapitre II est une adaptation au cas magnétique de l'étude de E. FEIREISL, A. NOVOTNÝ et H. PETZELTOVÁ sur les équations de Navier-Stokes compressibles, cette étude consistant à construire des solutions régulières d'un système approché

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = \varepsilon \Delta \varrho,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{rot} B \wedge B + a\nabla(\varrho^\gamma) + \delta\nabla(\varrho^\beta) + \varepsilon \nabla u . \nabla \varrho = \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div} u),$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}(\eta \ \mathrm{rot} B) = 0, \quad \mathrm{div} B = 0,$$

puis à passer aux limites lorsque ε et δ tendent vers 0 pour conclure à l'existence de solutions faibles du système initial. Les résultats existants sur les questions d'existence pour le modèle MHD compressible ne couvrent pas le cas barotrope général $p(\varrho) = \varrho^\gamma$ avec des constantes adiabatiques $\gamma > \frac{3}{2}$. En effet, une généralisation au cas magnétique a récemment été conclue par B. DUCOMET et E. FEIREISL pour le modèle MHD complet avec température et des lois de pression asymptotiquement liée au cas des gaz monoatomiques, autrement dit pour la valeur $\gamma = \frac{5}{3}$. Le travail qui suit propose donc un résultat plus général relativement à la constante adiabatique γ mais sans conduction de chaleur. Alors que la preuve de la stabilité est très proche du cas non magnétique, il suffit en effet de s'assurer de la compatibilité avec la présence d'un champ magnétique B, la construction des solutions régulières du système approché est plus délicate. Le choix de l'espace de solutions régulières pour B constitue la difficulté principale.

La **deuxième partie** introduit une difficulté supplémentaire, celle des viscosités variables. En effet, nous avons essayé de voir si des résultats d'existence de solutions faibles pouvaient être établis pour des modèles magnétiques avec viscosités fonctions de la densité. L'outil crucial pour l'étude de ce genre de modèles est l'entropie BD, introduite par D. BRESCH et B. DESJARDINS très récemment. Jusqu'alors, les protocoles réflexes pour l'étude des équations de Navier-Stokes et plus particulièrement les questions d'énergie, concernaient essentiellement la vitesse u du fluide. Mais, le choix de viscosités dépendantes de la densité ϱ induit de nouveaux termes couplés "densité-vitesse". Rappelons ici les profils de viscosités admissibles pour l'étude de D. BRESCH et B. DESJARDINS :
λ et μ appartiennent respectivement à $C^0(\mathbb{R}_+)$ et $C^1(\mathbb{R}_+)$, elles vérifient $\mu(0) = 0$ et

$$\forall s < A, \quad \mu(s) \geq c_0 s^n, \; 3\lambda(s) + 2\mu(s) \geq c_0 s^n,$$

$$\forall s \geq A, \quad c_1 s^m \leq \mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m, \; c_1 s^m \leq 3\lambda(s) + 2\mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m,$$

où c_0, c_1, A sont des constantes positives et $m > 1$, $\frac{2}{3} < n < 1$.

L'idée de D. BRESCH et B. DESJARDINS fut de chercher un moyen d'obtenir de nouvelles estimations sur la densité. Ils sont alors parvenus à mettre en évidence une vitesse "modifiée", elle vérifie une nouvelle équation d'énergie que l'on appellera formule BD dans ce mémoire, elle est incontournable pour l'étude des modèles auxquels nous allons nous intéresser. En particulier, nous traiterons le cas d'un modèle magnétique avec conduction de chaleur issu de la théorie de Born-Infeld. Les modèles MHD compressibles complets avec conduction de chaleur pour des choix de viscosités dépendantes de la densité du fluide présentent donc plusieurs difficultés, celles de la compressibilité, du vide, de la dépendance en densité des coefficients de viscosité, mais aussi de résistivité et enfin de la compatibilité d'une structure existante avec la présence d'un champ magnétique. Il faut bien insister, d'ailleurs, sur la grande importance de la résistivité $\eta = \eta(\varrho)$ et surtout de sa dépendance en densité qui constitue finalement, comme on le verra plus tard, l'unique et maigre marge de manoeuvre pour l'adaptation au cas magnétique de résultats déjà établis sur Navier-Stokes. On mettra donc en évidence les profils de résistivité compatibles. La première idée, qui s'avéra malheureusement infructueuse, fût de montrer la stabilité de solutions faibles pour le modèle MHD classique dans le cas de viscosités non constantes. Ce modèle ne semble pas vraiment adapté à cette étude, par contre, il est possible de mettre en évidence une structure compatible avec l'entropie BD pour un autre modèle magnétique, un modèle de fluides visqueux dérivé du système de Born-Infeld Augmenté, présenté ci-dessous :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u - \varrho B^* \otimes B^*) + \nabla P - 2\mathrm{div}\big(\mu D(u)\big) - \nabla(\lambda \mathrm{div} u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho B^*) - \mathrm{rot}(\varrho u \wedge B^*) + 2\mathrm{rot}(\eta \mathrm{rot} B^*) = 0, \quad \mathrm{div} B = 0.$$

Cette prédisposition favorable n'a pas été pour autant évidente, nous l'avons rendu possible grâce à un choix bien particulier des profils de viscosité admissibles

$$\forall s > 0,\ \eta(s) = \mu(s) + c,\ c \geq 0.$$

après avoir remarqué la forme particulière du terme magnétique de l'équation de quantité de mouvement. Un tel résultat semble intéressant car il présente une véritable structure d'énergie et d'entropie BD.

Enfin, en **troisième partie**, il est question de stabilité pour des modèles d'interface bi-fluides dans le cas magnétique ou non.
Cette partie a d'une part été motivée par le sujet des instabilités observées dans les plasmas de fusion que l'on peut étudier sur différents modèles. D'autre part, nous avons gardé l'idée d'un théorème analogue à celui énoncé dans le chapitre IV pour la MHD classique

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla P - \mathrm{rot} B \wedge B - \varrho \nabla\big(\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)\big) =$$

$$2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho)D(u)\big) + \nabla(\lambda(\varrho)\mathrm{div} u),$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}\big(\eta(\varrho)\mathrm{rot} B\big) = 0, \quad \mathrm{div} B = 0,$$

et le cas particulier d'un modèle d'interface a semblé être une issue favorable dans cette voie. En effet, la présence d'une tension de surface induit une régularité supplémentaire sur le densité, ce qui nous a permis d'espèrer des estimations suffisantes pour la stabilité des solutions. Nous montrons donc, dans le chapitre VII, que la stratégie Bresch-Desjardins peut à nouveau être exploitée pour la preuve d'un résultat de stabilité de solutions faibles d'un modèle de Korteweg en dimension 2 à nouveau pour un choix spécial de profils de résistivité continus tels que :

$$\forall s < B,\ \ \frac{d_0}{s^a} \leq \eta(s) \leq \frac{d_0'}{s^{a'}} \ \text{ et } \ \forall s \geq B,\ d_1 \leq \eta(s) \leq d_1' s^b,$$

où $B > 0$, d_0, d_0', d_1, d_1' sont des constantes suffisamment grandes, $2 \leq a < a' < 3$ et $b \in [0, +\infty[$. Il n'a pas été facile d'exhiber ces conditions, nous remarquons qu'elles sont définies séparément pour les densités proches et loin du vide, comme pour les profils de viscosité.

Un second travail, dans le chapitre VIII, consiste à mettre en évidence l'influence de la capillarité sur les phénomènes d'instabilité de type Rayleigh-Taylor pour le modèle de Korteweg :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \nu \mathrm{div}(\varrho \nabla u) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p = \varrho g.$$

On s'intéresse tout d'abord aux questions de stabilité relatives à l'énergie. On peut effectivement montrer la stabilité linéaire autour d'un état constant, et en ce qui concerne l'étude non-linéaire, on montre aussi la stabilité monotone en temps ainsi qu'une stabilité exponentielle loin du vide. On étudie ensuite les instabilité de type Rayleigh-Taylor, on considère pour cela une perturbation du flot statique $(0, p^0, \varrho^0)$ associé à une vitesse nulle et tel que $\nabla p^0 = \sigma \varrho^0 \nabla \Delta \varrho^0 + \varrho^0 g$.
Dans le cas $\nu = 0$, et pour le choix de solutions ϱ, u, p de type $\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx + \gamma t)$, la tension de surface T_s intervient à l'ordre 3 par rapport au nombre d'onde k selon le développement

$$\frac{\gamma^2}{gk} \approx A - \frac{T_s}{g(\varrho_1 + \varrho_2)} k^2,$$

où $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ est appelé nombre d'Atwood, ϱ_1 et ϱ_2 sont les densités respectives des deux fluides séparés par l'interface.

Outre les calculs abondants et délicats menés pour obtenir ce développement asymptotique, il a été nécessaire d'approcher l'interface raide entre les deux fluides par une interface diffuse représentée par le profil de densité continu

$$\varrho^0 = \begin{cases} 1 + A & \text{if } z \geq A \\ 1 + z & \text{if } |z| \leq A \\ 1 - A & \text{if } z \leq -A \end{cases}$$

La viscosité a également une influence sur cette instabilité, la question de la concurrence entre capillarité et viscosité se pose donc, elle ne sera pas étudiée dans ce mémoire mais pourrait faire l'objet d'un travail futur bien qu'il s'annonce très périlleux.

Mots clés :

Fluides compressibles, équations de Navier-Stokes, viscosité, entropie BD, solutions faibles, plasmas, magnétohydrodynamique, théorie électromagnétique de Born-Infeld, résistivité, conduction de chaleur, modèles bi-fluides, modèles capillaires, interfaces diffuses, système de Korteweg, tension de surface, instabilités de type Rayleigh-Taylor, nombre d'Atwood.

Table des matières

Partie II. Modèles à viscosité variable

Partie III. Modèles capillaires

Partie I

Modèles à viscosité constante

Chapitre I

Fluides compressibles et Magnéto-Hydro-Dynamique

1.1. Equations de Navier-Stokes compressibles

Les équations de Navier-Stokes, modélisant l'écoulement d'un fluide, rappelées en introduction sont le point commun à toutes les études qui seront présentées dans ce document. Rappelons donc, pour commencer, ces lois qui décrivent l'évolution, dans le temps, de la densité et de la vitesse d'un fluide compressible, de pression p, soumis aux forces extérieures f_{ext} et occupant un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^N$, pour $N \geq 2$:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\, u) = \varrho f_{ext}.$$

Pour que ces équations constituent un problème bien posé, il faut leur ajouter des **conditions de bord**, pour le cas d'un domaine borné comme nous l'avons supposé ici, il est naturel d'imposer une condition de non glissement, autrement dit les conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω :

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

De plus, pour les équations d'évolution, on doit également considérer la densité ϱ_0 et la vitesse u_0 à $t = 0$, pour lesquelles on définira des **conditions initiales**.

1.1.1. Lois de pression

Un fluide compressible, pour être simple, est un fluide à l'état gazeux, par opposition aux liquides, considérés comme des fluides incompressibles. Les lois de la thermodynamique sont nombreuses et permettent la modélisation de diverses transformations. Les conditions de réversibilité et de transfert de chaleur conduisent à différentes relations entre pression et température, la première considération dans nos travaux sera celle des gaz parfaits, pour lesquels on appliquera évidemment la **loi des gaz parfaits** suivante :

$$p = r\varrho\theta,$$

où θ représente la température du fluide et r est la constante des gaz parfaits.
Dans le cas plus particulier d'une transformation adiabatique, et ce sera le cas pour la première partie de ce document, la condition d'un échange de chaleur nul implique que la pression dépend uniquement de la densité du fluide et s'écrit :

$$p = a\varrho^\gamma, \quad a > 0,$$

où $\gamma > 1$ est appelée constante adiabatique.

1.1.2. Température

Dans le cas de transformations non adiabatiques, aux inconnues du système déjà présentées, on doit ajouter θ la température. Elle est liée à la pression et la densité du fluide par la loi des gaz parfaits que l'on vient de citer et pour fermer le système, on introduit également une loi de conservation en température dont on parlera plus loin.

1.1.3. Viscosité

Les termes $\mu\Delta u$ et $(\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u$ sont des termes d'ordre 2, diffusifs, qui traduisent, physiquement, des effets visqueux et c'est pourquoi λ et μ sont appelés coefficients de viscosité. Ces coefficients sont pour l'instant supposés constants et, mathématiquement, ont pour effet de rendre la vitesse u plus régulière. Les estimations d'énergie induites par les termes de diffusion donnent

$$u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Néanmoins, on considérera plus loin dans ce document, des cas où l'on suppose que les coefficients de viscosité dépendent des caractéristiques du fluide, plus précisément de sa densité. On verra donc que cette dépendance entraîne quelques difficultés, en particulier elle crée des non-linéarités pour lesquelles les convergences seront problématiques et modifie les estimations d'énergie que l'on avait jusqu'alors sur la vitesse. On perd beaucoup d'information, notamment pour les cas dégénérés.

1.2. Résultats sur Navier-Stokes compressible

Une vaste littérature existe sur ce sujet et beaucoup d'auteurs ont contribué à obtenir certaines réponses aux questions d'existence de solutions, moyennant différentes hypothèses sur les conditions initiales (petitesse, régularité) ou même sur les coefficients de viscosité. La première approche rigoureuse des problèmes d'existence de solutions est dûe à P.–L. Lions, lorsqu'il énonca, en 1993, une théorie complète sur le sujet. Combinant les idées de D. Hoff et D. Serre sur l'importance du flux effectif sur la stabilité, les régularités liées aux commutateurs développées par R. Coifman et Y. Meyer et les propriétés de transport qu'il a étudiées avec R.J. Di Perna, il a obtenu des résultats d'existence de solutions faibles globales en temps pour des données initiales générales.

Théorème 1.1. *(Voir th. 7.2 dans [1.17], pour des conditions de Dirichlet homogènes.) Si $\gamma \geq \frac{3}{2}$ et $N = 2$, $\gamma \geq \frac{9}{5}$ et $N = 3$, alors il existe une solution globale (ϱ, u) dans $L^\infty(0,T; L^\gamma(\Omega)) \times L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ du système*

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + a\nabla \varrho^\gamma - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} u) = 0,$$

pour des conditions initiales vérifiant

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0 \in L^\gamma(\Omega)$$

$$(\varrho u)|_{t=0} = m_0, \ \frac{m_0^2}{\varrho_0} \in L^1(\Omega) \text{ et } \frac{m_0^2}{\varrho_0} = 0 \text{ sur } \{\varrho_0 = 0\}.$$

De plus, cette solution satisfait les propriétés suivantes : $\varrho \in C([0,T]; L^p(\Omega))$ si $1 \leq p < \gamma$, $\varrho |u|^2 \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ et $\varrho \in L^q((0,T) \times K)$,pour tout ensemble K compact dans Ω et pour tout $q \in [1, \gamma - 1 + \frac{2\gamma}{N}]$ si $N \geq 3$ et $q \in [1, 2\gamma - 1)$ si $N = 2$, ainsi que l'inégalité d'énergie valable pour tout $t \geq 0$:

$$\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varrho|\vec{u}|^2 + \frac{a}{\gamma-1}\varrho^\gamma\Big)(t,x)dx + \int_0^t \int_\Omega \Big(\mu|\nabla\vec{u}|^2 + (\lambda+\mu)|\operatorname{div}\vec{u}|^2\Big)(s,x)dxds$$
$$\leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\frac{m_0^2}{\varrho_0} + \frac{a}{\gamma-1}\varrho_0^\gamma\Big)(x)dx.$$

Notons que P.–L. Lions propose aussi des preuves dans les cas de conditions de bord périodiques ou nulle à l'infini sur l'espace entier. Ce résultat a ensuite été généralisé par E. Feireisl notamment, ces travaux constituent les bases des études de la première partie de ce mémoire. L'existence de solutions faibles globales en temps pour le système complet avec conduction de chaleur est encore un problème ouvert en dimension $N \geq 2$, nous donnerons quelques éléments de réponse dans la deuxième partie en considérant des viscosités variables.
En revanche, les études de E. Feireisl dans le cas de viscosités μ et λ constantes ont conduit à l'existence de solutions faibles pour ce modèle sous la condition $\gamma > 3/2$ en dimension 3 (et plus généralement $\gamma > N/2$ en dimension N). Cette condition semble être optimale car elle apparaît plusieurs fois dans les preuves qu'il propose, elle améliore la condition adiabatique $\gamma \geq 9/5$ de P.–L. Lions car elle inclut le cas des gaz monoatomiques ($\gamma = 5/3$). Le livre de A. Novotný et I. Straskraba [1.19] détaille et compare très précisément les stratégies de P.–L. Lions et E. Feireisl pour l'étude des modèles de fluides compressibles à viscosités constantes. Les stratégies sont maintenant devenues classiques, avec construction par une méthode de type Galerkin de solutions approchées et application d'un théorème de point fixe. Une particularité, en revanche, consiste à introduire la notion de solutions renormalisées, c'est-à-dire solutions d'une équation dérivée de l'équation de conservation de la masse et qui s'écrit, pour toute fonction b régulière,

$$\partial_t b(\varrho) + \operatorname{div}(b(\varrho)u) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\operatorname{div} u = 0,$$

on peut consulter par exemple [1.17], [1.10], [1.11] ou [1.19].
La difficulté majeure dans ces études pourrait se résumer au passage à la limite dans le terme de pression et plus précisément aux questions de convergence forte de la densité. Les estimations provenant des estimations d'énergie classiques ne donnent pas de compacité en densité, il aura donc fallu, pour P.–L. Lions, utiliser une certaine forme de compacité faible relative à la suite des flux effectifs visqueux

$$a\varrho_n^\gamma - (\lambda + 2\mu)\mathrm{div}u_n,$$

qui sera également exploitée par E. Feireisl et al. pour déduire de la convergence de ϱ_n vers ρ celle de ϱ_n^γ vers ϱ^γ a priori non évidente. Néanmoins, pour donner quelques précisions sur le point fondamental qui différencie les démarches de P.–L. Lions et E. Feireisl, indiquons simplement l'idée qui permit à E. Feireisl et al. de constituer une preuve pour les constantes $\gamma \in]\frac{3}{2}, \frac{9}{5}[$. Leur divergence est consécutive au résultat intermédiaire donnant l'intégrabilité de ϱ_n dans $L^{\gamma+\theta}(\Omega)$ avec $\theta = \frac{2}{3}\gamma - 1$. La théorie du transport de Di Perna–Lions nécessite une densité de carré intégrable, ce qui a conduit, dans un premier temps, à formuler la contrainte adiabatique $\gamma \geq \frac{9}{5}$. En effet, pour des valeurs $\gamma < \frac{9}{5}$, la densité n'est pas de carré intégrable.
L'idée de E. Feireisl et al. fût alors de remarquer que l'on pouvait néanmoins contrôler l'amplitude des oscillations de la densité grâce à l'identité

$$osc_{\gamma+1}[\varrho_n - \varrho] = \sup_{k>0} \limsup_{n\to+\infty} \|T_k(\varrho_n) - T_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} \leq c(T, \Omega, E_0),$$

où $T_k(z) = kT(z/k)$ pour $k \geq 1$ avec $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $T(z) = z$ pour $0 \leq z \leq 1$, $T(z) = 2$ pour $z \geq 3$ et T concave sur $\mathbb{R}^+$, et compenser ainsi l'information $\varrho \in L^2((0,T) \times \Omega)$ manquante pour les valeurs $\frac{3}{2} < \gamma < \frac{9}{5}$.

Ces démarches peuvent être adaptées au cas magnétique, c'est ce que l'on s'attachera à expliquer dans le deuxième chapitre après avoir introduit les équations correspondantes.

1.3. Magnéto-hydro-dynamique : équations de base

A la diffèrence du cas statique où les champs électrique et magnétique peuvent exister indépendamment, la théorie de l'électromagnétisme consiste à rendre compte du fait que des champs variables s'induisent mutuellement. Aux résultats de l'électrostatique et de la magnétostatique, il faut ajouter deux effets supplémentaires qui apparaissent en régime variable :

▷ La loi d'induction électromagnétique
▷ Un courant de déplacement

1.3.1. Régime statique

Loi d'Ampère :

$$\mathrm{rot}B = \mu_0 j$$

Loi de Gauss :

$$\mathrm{div}E = \frac{\varrho_c}{\varepsilon_0}$$

Conservation du champ B:

$$\mathrm{div}B = 0$$

où on note ϱ_c la densité de charge, j la densité de courant, E le champ électrique et B le champ magnétique (ou plus exactement la densité de flux magnétique). Les constantes μ_0 et ε_0 désignent respectivement la perméabilité magnétique et la permitivité électrique du vide.

1.3.2. Induction électromagnétique et loi de Faraday

On savait depuis J.–B. Biot et F. Savart qu'un courant électrique continu crée un champ magnétique statique. Tentant de démontrer, sans succès, l'effet réciproque, M. Faraday découvrit en 1831 qu'une variation du champ magnétique était nécessaire pour induire un courant électrique et proposa ainsi sa loi :

Loi de Faraday :

$$\mathrm{rot}E = -\partial_t B$$

1.3.3. Equation de continuité électrique

La loi de conservation de la charge électrique se traduit par l'équation :

$$\partial_t \varrho_c + \mathrm{div}j = 0$$

ou encore, en y mêlant la loi de Gauss et en notant $j_D = \varepsilon_0 \partial_t E$ le courant de déplacement, on obtient *la loi de conservation du courant total* :

$$\mathrm{div}(j + j_D) = 0$$

1.4. Modèle MHD

La Magnétohydrodynamique est l'étude du mouvement d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique extérieur, le modèle correspondant se compose des équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoute les effets magnétiques, à savoir le couplage avec les équations de Maxwell.

La modélisation MHD intervient aujourd'hui dans de nombreux secteurs technologiques, elles peuvent parfois varier selon les contextes. Un modèle de fluide sous influence magnétique entre par exemple dans le cadre de la fusion nucléaire, réaction fortement exothermique entre noyaux légers. Il ne s'agit pas véritablement de fusion au sens "assemblage" de deux éléments pour en faire un seul mais plutôt d'un échange de neutrons ou de protons entre deux éléments, généralement des isotopes de l'atome d'hydrogène.
La fusion nucléaire intéresse les chercheurs depuis les années 50 car elle met en jeu des quantités folles d'énergie par unité de masse, comparées par exemple à celles obtenues pour

les hydrocarbures (environ 100GJ/g contre 20kJ/g) et des réactifs presque inépuisables. Pour donner un exemple, la réaction entre le deutérium et de tritium (deux isotopes de l'hydrogène) s'écrit ainsi

$$D + T \rightarrow n + He + 18\ MeV.$$

Il s'agit là de la réaction privilégiée aujourd'hui pour les études à venir.
Quelques pays ont entrepris alors la construction de "tokamaks", des machines expérimentales, de forme toroïdale, destinées à contenir des gaz entièrement ionisés portés à très haute température que l'on appelle des plasmas, sièges de ces réactions dites de fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique. En effet, aucune structure matérielle n'étant suffisamment résistante pour contenir ces gaz à quelques 300 millions de degrés et sous une pression de 10^6 atm., on utilise donc un champ magnétique. On espère ainsi recueillir de grandes quantités d'énergie, résultats de ces réactions de fusion.

Cependant, le bilan énergétique de ces expériences dépend fortement du temps pendant lequel le plasma de fusion est maintenu dans un état quasi-statique. Les essais récents réalisés au Commisariat à l'Energie Atomique sur la fusion nucléaire contrôlée ont permis d'augmenter considérablement la durée de confinement des plasmas de tokamak, en essayant de contrer au mieux les perturbations susceptibles de rompre un état d'équilibre. Les instabilités dites "disruptives", celles qui détruisent complètement le plasma, peuvent désormais être contrôlées. Cependant, tout ne peut pas être évité, c'est pourquoi il est nécessaire d'étudier plus en détails les phénomènes qui pourraient perturber la réaction.
En ce qui concerne la fusion nucléaire, l'étude MHD prend une part très importante pour la caractérisation et la stabilité des états d'équilibre d'une structure magnétique de confinement. Le livre de B. Saramito [1.23] décrit en détails les problèmes physiques relatifs à ces expériences et l'étude de la stabilité d'un plasma lorsqu'il est assimilé à un fluide compressible soumis à un champ magnétique. L'étude porte précisément sur les instabilités non disruptives comme la convection et le déchirement des surfaces magnétiques.
Les instabilités de type Rayleigh-Taylor sont très intéressantes dans l'évolution des plasmas magnétisés au cours des expériences de fusion nucléaire mais pas seulement, on leur porte une attention particulière également pour l'étude des fluides classiques et même des étoiles. Le chapitre VIII est consacré à une étude d'instabilité Rayleigh-Taylor pour le modèle de Korteweg, nous reviendrons donc à ces instabilités un peu plus loin, dans le chapitre introductif sur les interfaces.
La Magnétohydrodynamique trouve également d'autres applications dans le domaine des métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus) ou des gaz faiblement ionisés (pompage électromagnétique, propulsion ionique, conversion d'énergie...).
Les phénomènes observés en MHD pour les métaux liquides sont largement recensés dans le livre de J.–F. Gerbeau, C. Le Bris et T. Lelièvre [1.12], ils décrivent très précisément l'analyse mathématique des modèles MHD à un et deux fluides, et présentent également études numériques et aspects industriels.
Généralement, un modèle MHD sous-entend modèle à un fluide, néanmoins il est parfois nécessaire de distinguer les différents composants d'un mélange de fluides lors d'une expérience, c'est le cas, par exemple, des ions et des électrons lors de la fusion nucléaire.

Cette vision suppose une caractérisation physique plus complète, dont on peut trouver des détails dans [1.3].
De nombreux auteurs ont déjà consacré leur temps à l'étude des systèmes MHD évolutif à un fluide avec densité constante, par extension de travaux antérieurs sur Navier-Stokes. L'existence et l'unicité de solutions ont été prouvées par G. Duvaut et J.–L. Lions il y a 35 ans dans le cas de fluides de Bingham occupant un domaine borné et simplement connexe, résultats complétés 10 ans plus tard par M. Sermange et R. Temam [1.24] pour les fluides newtoniens. Ils prouvent, en dimension 3, l'existence d'une solution faible globale mais aussi, pour des données initiales régulières, l'existence et l'unicité, pour des temps petits, d'une solution forte.
Ces travaux sont un outil majeur pour le développement des idées de Gerbeau–Le Bris–Lelièvre dans [1.12] dans le cas incompressible mais leur analyse présente également une caractérisation MHD multifluide, qui s'avére plus délicate puisqu'elle s'inscrit entièrement dans le cadre de problèmes à densités non homogènes. Ils n'ommettent d'ailleurs pas de souligner que le choix d'une densité non homogène rend plus difficile les questions d'existence.
L'hypothèse de compressibilité que nous maintenons tout au long de ce mémoire ne nous épargne donc pas des complications causées par l'hétérogénéité de la densité ϱ, ces difficultés se multipliant lorsque les propriétés du fluide dépendent de la densité. Nous ferons quelques commentaires à ce sujet dans la partie réservée aux modèles à viscosités variables. Une étude intéressante consisterait d'ailleurs à mettre en évidence l'influence du champ magnétique sur la transition compressible-incompressible. Des travaux déjà existants sur les limites de faible nombre de Mach peuvent peut-être être généralisés au cas magnétique, par exemple dans le cas barotrope sur le domaine entier, travail proposé par B. Desjardins et E. Grenier [1.7] et en collaboration avec P.–L. Lions et N. Masmoudi pour le domaine borné [1.20].

1.4.1. Equations de Maxwell

Entre 1850 et 1861, James Clerk Maxwell démontra l'unicité des champs électrique et magnétique en régime variable et émit l'hypothèse, inconcevable à l'époque, que la lumière pourrait n'être qu'une forme d'onde électromagnétique.
J.C. Maxwell proposa de généraliser la loi d'Ampère en remplaçant le courant j par le courant total $j + j_D$, ce qui donna la *loi de Maxwell-Ampère*. Ajoutant à cela les lois de Gauss, Faraday et de conservation du champ magnétique, on obtient les équations de Maxwell :

$$\mathrm{rot}E = -\partial_t B, \quad \mathrm{div}E = \frac{\varrho_c}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\partial_t E, \quad \mathrm{div}B = 0 \tag{1.2}$$

où la constante c représente la vitesse de la lumière et satisfait l'égalité $\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$.
Ces équations traduisent le couplage entre champs électrique et magnétique en régime variable et les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique apparaissent comme un cas particulier obtenu évidemment en supprimant les dérivées par rapport au temps. Les

équations de Maxwell servent de point de départ à toutes les études portant sur la théorie des ondes électromagnétiques et sur l'étude des transmissions optiques et micro-ondes.
La résolution des équations de Maxwell joue un rôle important dans quelques applications mettant en jeu des particules chargées, notamment en physique des plasmas. Dans certains travaux sur les recherches de solutions, elles sont couplées avec les équations de Vlasov et on utilise une formulation généralisée des équations de Maxwell, une version physiquement équivalente mais moins sensible aux perturbations d'un point de vue numérique. On renvoie aux travaux récents de R. Barthelmé, P. Ciarlet et E. Sonnendrücker [1.1] pour les détails sur ces méthodes de correction.

1.4.2. Force de Lorentz

La force de Lorentz est relative à la coexistence d'un courant électrique j et d'un champ magnétique B ambiant, elle influence le mouvement des particules du fluide conducteur et s'écrit :

$$f_L = j \wedge B \tag{1.3}$$

1.4.3. Loi d'Ohm

Pour fermer le système, on doit compléter les équations de Maxwell (1.1)–(1.2) en ajoutant une équation supplémentaire : *la loi d'Ohm.* De manière générale, elle s'écrit ainsi :

$$j = \sigma(E + u \wedge B) \tag{1.4}$$

où σ représente la conductivité électrique. Par ailleurs, on note $\eta = \sigma^{-1}$ l'inverse de la conductivité que l'on appelle résistivité.
Dans des modèles très simplifiés, le second terme du membre de droite peut être négligé et la loi d'Ohm se réduit alors à $j = \sigma E$ mais cette version ne s'avère réaliste que dans le cas des solides. Pour les fluides, le terme $u \wedge B$ a beaucoup d'importance, il rend compte de la déviation des lignes du courant électrique par le déplacement de fluide et ne peut donc pas être supprimé.Lorsque la résistivité η est faible ou négligeable par rapport à d'autres effets, on peut modéliser le mouvement d'un fluide sous l'influence d'un champ magnétique par un modèle *MHD "idéale"* pour lequel on réécrit la loi d'Ohm pour une conductivité parfaite :

$$E + u \wedge B = 0$$

Au contraire, la *MHD "résistive"* tient compte des effets de diffusion ce qui se traduit habituellement par une équation de champ magnétique que l'on obtient en prenant le rotationnel de la loi d'Ohm :

$$\mathrm{rot}(\eta j) = -\partial_t B + \mathrm{rot}(u \wedge B)$$

1.4.4. Les équations MHD

Pour résumer, la forme générale du système MHD est composé des équations de Navier-Stokes que l'on a rappelées dans le chapitre précédent et dans lesquelles on prendra en compte la force de Lorentz (1.3) :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}u) = f_L$$

et de l'ensemble des équations citées ici, les équations de Maxwell ainsi que la loi d'Ohm :

$$\partial_t B + \mathrm{rot}E = 0, \quad \varrho_c = \varepsilon_0 \mathrm{div}E$$

$$\mathrm{rot}B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\partial_t E, \quad \mathrm{div}B = 0$$

$$j = \sigma(E + u \wedge B)$$

Le modèle auquel on s'intéressera dans la suite est une version simplifiée dans laquelle on préférera la loi d'Ampère à la loi modifiée de Maxwell-Ampère, cette approximation étant largement justifiée par la grande valeur de la vitesse de la lumière c. Dans ce cas, on peut réorganiser les équations, ainsi j s'exprime en fonction de B par la loi d'Ampère et E est donné par la loi d'Ohm en fonction de j, u et B.
On obtient alors le *modèle MHD simplifié* pour les inconnues ϱ, u, B et p :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0 \tag{1.5}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \mathrm{rot}B \wedge B = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}u) \tag{1.6}$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}(\eta \mathrm{rot}B) = 0 \tag{1.7}$$

$$\mathrm{div}B = 0 \tag{1.8}$$

Ces équations doivent évidemment être accompagnées de conditions initiales et de bord selon les problèmes, on en reparlera plus loin.

1.5. Techniques en MHD

1.5.1. Quelques résultats

Parmi les travaux sur ce sujet, on a déjà évoqué le livre de GERBEAU–LE BRIS–LELIÈVRE [1.12] qui détaille les étapes de démonstration de l'existence de solutions faibles globales en temps pour les modèles MHD à un fluide ou à deux fluides en régime incompressible.
Dans le même temps, Ducomet et Feireisl [1.9] proposent une preuve d'existence de solutions faibles pour le modèle MHD, version compressible cette fois mais avec température. Attardons nous quelques instants sur ce résultat. B. DUCOMET et E. FEIREISL prouvent l'existence de solutions faibles pour le modèle MHD avec température, dans un domaine borné régulier de classe $C^{2+\nu}$, $\nu > 0$ pour des données initiales $\varrho_0 \geq 0$, u_0, $\theta_0 > 0$, B_0 satisfaisant

$$\varrho_0 \in L^{\frac{5}{3}}(\Omega), \ \frac{|(\varrho u)_0|^2}{\varrho_0} \in L^1(\Omega), \ \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$$

$$B_0 \in L^2(\Omega), \ \mathrm{div}B_0 = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \ B_0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$$

Nous remarquons qu'il concerne très précisément le cas des gaz monoatomiques, en effet, cette étude suppose, pour une densité ϱ et une température θ, un terme de pression de la forme

$$p(\varrho,\theta) = p_F(\varrho,\theta) + p_R(\theta)$$

avec, entre autres, certaines hypothèses de compatibilité qui conduisent à

$$p_F(\varrho,\theta) = \theta^{\frac{5}{2}} P_F(\frac{\varrho}{\theta^{\frac{3}{2}}})$$

où $P_F \in C^1(0,\infty)$ est une fonction satisfaisant la condition asymptotique

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{P_F(z)}{z^{\frac{5}{3}}} = p_\infty > 0.$$

En d'autres termes, les formes admissibles pour le terme de pression P_F doivent coïncider, asymptotiquement, avec la loi $P_F(\varrho) = \varrho^\gamma$, avec $\gamma = \frac{5}{3}$, équation d'état des gaz parfaits monoatomiques. Signalons au passage que la fonction p_R est supposée vérifier la loi de Stefan-Boltzmann

$$p_R(\theta) = a\theta^4, \ a > 0.$$

Nous remarquons par exemple que le travail de Ducomet et Feireisl conduit à un résultat d'existence de solutions faibles pour le modèle MHD sans température (si on considère une température constante) pour un loi de pression adiabatique pour les gaz monoatomiques (asymptotiquement au moins). Les étapes de la preuve sont calquées sur celles de [1.10], incorporant bien sûr quelques difficultés concernant champ magnétique et température. Notons qu'il est quand même question dans [1.9] de viscosités non constantes (ce qui n'entre pas tout à fait dans le cadre de ce premier chapitre) mais néanmoins indépendantes de la densité. Elles peuvent dépendre du champ magnétique $\vec{B}$ et de la température θ et les auteurs de [1.9] expliquent également qu'en l'absence de champ magnétique, la seule dépendance en température a un sens physique au moins dans le cas des gaz, en particulier pour le modèle de la sphère dure ($\mu(\theta) = \sqrt{\theta}$). La dépendance en ϱ est exclue car elle crée d'importantes difficultés mathématiques et nous nous attacherons à proposer des solutions à ce genre de problèmes dans la deuxième partie.

1.5.2. Le cas compressible barotrope *(→ chapitre II)*

Dans le chapitre suivant, on présente un résultat d'existence de solutions faibles pour un modèle MHD compressible dans le cas barotrope pour des constantes adiabatiques $\gamma > \frac{3}{2}$. Avant d'en venir au premier résultat personnel de ce document, ajoutons quelques remarques préliminaires concernant le cas magnétique en compressible. Bien sûr, les études de P.–L. Lions et E. Feireisl seront l'appui principal pour énoncer un résultat d'existence sur le modèle MHD puisqu'il s'agit en fait d'une généralisation au cas magnétique de l'étude de E. Feireisl, A. Novotný et H. Petzeltová sur Navier-Stokes compressible [1.10].

Le résultat dont on détaille la preuve dans le deuxième chapitre est le suivant :

Théorème 1.2. *Soit* $a > 0$ *et* $\gamma > \frac{3}{2}$. *Soient* $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$, $\eta > 0$.
Considérons des fonctions ϱ_0, u_0 *et* B_0 *telles que :*

$$\varrho_0 \in L^\gamma(\Omega),\ B_0^i \in L^2(\Omega),\ \frac{|(\varrho u^i)(0)|^2}{\varrho_0} \in L^1(\Omega),\ i = 1, 2, 3, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{div} B_0 = 0,\ B_0 \cdot n = 0,$$

Alors le système

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{rot} B \wedge B + a\nabla(\varrho^\gamma) = \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div} u),$$

$$\partial_t B + \mathrm{rot}(\eta\ \mathrm{rot} B) - \mathrm{rot}(u \wedge B) = 0,$$

avec les conditions de bord

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$B.n|_{\partial\Omega} = 0,$$

admet des solutions faibles globales en temps satisfaisant les conditions initiales $\varrho(0) = \varrho_0$, $B(0) = B_0$ *et* $(\varrho u)(0) = q$.

On va essayer maintenant de commenter brièvement les idées directrices de la preuve en mettant l'accent uniquement sur les difficultés propres au champ magnétique B. On résumera cela en deux parties, la première concernera la mise en place du théorème de point fixe pour l'existence où la difficulté apparaîtra dans le choix de l'espace de construction pour les solutions approchées de B, puis on fera, dans un deuxième temps, quelques commentaires sur les passages à la limite essentiellement à propos des conditions initiales.

Thèorème de point fixe

La première étape se résume en la construction de solutions du système modifié suivant :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = \varepsilon\Delta\varrho, \tag{1.10}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{rot} B \wedge B + a\nabla(\varrho^\gamma) + \delta\nabla(\varrho^\beta) + \varepsilon\nabla u.\nabla\varrho =$$

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div} u), \tag{1.11}$$

$$\partial_t B + \mathrm{rot}(\eta\ \mathrm{rot} B) - \mathrm{rot}(u \wedge B) = 0, \tag{1.12}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.13}$$

$$B.n|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.14}$$

$$\nabla\varrho.n|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.15}$$

$$\varrho(0) = \varrho_0 \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega}),\ (\nu > 0),\ 0 < \underline{\varrho} \leq \varrho_0 \leq \overline{\varrho},\ \nabla\varrho_0.n\ |_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.16}$$

$$B(0) = B_0 \in (H^1(\Omega))^3,\ \mathrm{div} B_0 = 0,\ B_0.n|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.17}$$

$$(\varrho u)(0) = q \in (C^2(\overline{\Omega}))^3, \tag{1.18}$$

généralisation au cas magnétique du système approché proposé dans [1.10]. La suite consiste alors à passer à la limite dans ce modèle pour $\varepsilon \to 0$ et ensuite $\delta \to 0$. Pour l'approximation de Faedo-Galerkin, on construit dans un premier temps des vitesses régulières dans un espace de dimension finie dense dans $\left(H^1(\Omega)\right)^3$

$$X_n = \left(\mathrm{span}\{\psi_j, j = 1, ..., n\}\right)^3,$$

où les fonctions ψ_j sont régulières et nulles sur le bord $\partial\Omega$, par exemple les fonctions propres de l'opérateur Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes. En ce qui nous concerne ici, c'est-à-dire pour le cas magnétique, il faut également construire des solutions approchées pour B. Pour la recherche de l'espace relatif à B, les idées de B. Saramito ont été très utiles et conduisent à considérer l'espace

$$E = \left\{\phi \in (H^1(\Omega))^3; \mathrm{div}\phi = 0,\ \phi.n|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Il nous faut alors construire des solutions approchées dans un espace de dimension finie dense dans E et le choix de cet espace fut une des difficultés de ce travail. On propose finalement l'espace

$$Y_n = \mathrm{span}\{\phi_j, j = 1, ..., n\},$$

où les fonctions ϕ_j, satisfaisant

$$\mathrm{rot\ rot}\ \phi_j = \lambda_j \phi_j,\ \text{dans } \Omega,$$

$$\mathrm{rot}\phi_j \wedge n = 0,\ \text{sur } \partial\Omega,$$

forment une suite de fonctions régulières, orthogonales au sens du produit scalaire

$$(\phi_1|\phi_2) = \int_\Omega \mathrm{rot}\phi_1 \cdot \mathrm{rot}\phi_2\ dx$$

et Y_n est dense dans l'espace E. Remarquons que l'information de divergence nulle qui apparaît dans la définition de E peut également être perçue comme une conséquence de l'association de la condition initiale (1.17) et de l'équation (1.12). Un théorème de point fixe classique peut alors s'appliquer pour le couple vitesse-champ magnétique grâce essentiellement à la stricte positivité de la densité.

Compacité et passage à la limite

Selon les idées déjà développées par E. Feireisl, les passages à la limite s'effectuent grâce à la notion de flux effectif visqueux mais insistons plutôt sur l'aspect magnétique. On obtient des bornes de B dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et des convergences fortes dans les espaces $C([0, T]; L^2_w(\Omega))$ et $C([0, T]; W^{-1,2}(\Omega))$, ce qui permet aisément le passage à la limite pour les conditions initiales au sens des distributions. En ce qui concerne l'équation de B, les bornes et compacités sur u et B sont très confortables et permettent de conclure sans problème, par contre le passage à la limite dans le terme de force de Lorentz dans l'équation de conservation de quantité de mouvement n'est pas immédiat. En effet, les convergences citées juste au-dessus ne sont pas suffisantes. Cependant, le choix de Y_n dans la construction de solutions approchées donne la condition de divergence nulle et ainsi on écrit

$$\mathrm{rot} B_n \wedge B_n = \mathrm{div}(B_n \otimes B_n) - \frac{1}{2}\nabla B_n^2. \tag{1.19}$$

La condition de divergence nulle est aussi vraie pour B, on l'obtient grâce à la condition $\mathrm{div} B_0 = 0$ et l'équation de la masse vérifiée au sens des distributions, ce qui permet d'écrire également

$$\mathrm{rot} B \wedge B = \mathrm{div}(B \otimes B) - \frac{1}{2}\nabla B^2. \tag{1.20}$$

Exploitant ces nouvelles écritures, le passage à la limite de (1.19) à (1.20) est alors possible en utilisant les compacités rappelées plus haut.
Pour ce qui concerne la condition initiale du champ B, on considère la projection orthogonale P_{Y_n}, au sens $L^2(\Omega)$, de B_0 sur le sous espace de dimension finie Y_n. Grâce à la formulation faible vérifiée par B_n, pour toute fonction $\phi \in Y_n$:

$$\int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_\Omega \vec{B}_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_\Omega \big(\mathrm{rot}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \mathrm{rot}(\eta \ \mathrm{rot}\vec{B}_n)\big) \cdot \phi \, dxds,$$

on écrit $B_n(0) = P_{Y_n} B_0 \to B_0$ quand $n \to +\infty$ et on peut conclure que $B(0) = B_0$ à la limite grâce à la compacité de B_n dans $C([0,T]; W^{-1,2}(\Omega))$.

Références bibliographiques

[1.1] R. Barthelmé, P. Ciarlet, E. Sonnendrücker, Generalized formulations of Maxwell's equations for numerical Vlasov-Maxwell simulations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 17, no. 5, 657–680, (2007).

[1.2] M.E. Bogovskii, Solution of some vector analysis problems connected with operators div and grad (in Russian). *Trudy Sem. S. L. Sobolev,* **80** (1):5–40, (1980).

[1.3] S.I. Braginskii, Transport processes in a plasma. *Reviews of plasma physics,* Vol. 1, Consultant Bureau, p. 205, New York (1965).

[1.4] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no. 1, 57–90, (2007).

[1.5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, (1983).

[1.6] F.F. Chen *Introduction to Plasma Physics and Controlled fusion.* Plenum Press, New-York, (1984).

[1.7] B. Desjardins, E. Grenier, Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci,* 455, no. 1986, 2271–2279, (1999).

[1.8] R.J. Di Perna, P.–L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory ans Sobolev spaces. *Invent. Math.,* **98**:511–547, (1989).

[1.9] B. Ducomet, E. Feireisl, The equations of magnetohydrodynamics: on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars. *Comm. Math. Phys.* **266**, no 3, 595–629, (2006).

[1.10] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids. *J. Math. Fluid Mech.* **3** no.4, 358–392, (2001).

[1.11] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids.* Oxford Univ. Press, (2004).

[1.12] J.–F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford University Press, (2006).

[1.13] K. Kherief, *Quelques proriétés des équations de la magnétohydrodynamique stationnaires et d'évolution.* Thèse, Université de Paris VII, (1984).

[1.14] J.–L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Gautthier-Villars, Paris, (1969).

[1.15] J.–L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Vol 1.

[1.16] P.–L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol 1. Incompressible models.* Oxford Science Publication, Oxford, (1996).

[1.17] P.–L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol 2. Compressible models.* Oxford Science Publication, Oxford, (1998).

[1.18] A. LUNARDI, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems,* Birkhäuser, Berlin, (1995).

[1.19] A. NOVOTNÝ, I. STRASKRABA, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* Oxford lectures series in Mathematics and its applications, (2004).

[1.20] P.–L. LIONS, N. MASMOUDI, Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions. *J. Math. Pures Appl.* (9) 78, no. 5, 461–471, (1999).

[1.21] E. SANCHEZ-PALANCIA, *Existence des solutions de certains problèmes aux limites en Magnétohydrodynamique.* Journal de Mécanique **7**(3), 405–426, (1968).

[1.22] E. SANCHEZ-PALANCIA, *Quelques résultats d'existence et d'unicité pour des écoulements magnétohydrodynamiques non stationnaires.* Journal de Mécanique **8**(4), 509–541, (1969).

[1.23] B. SARAMITO, *Stabilité d'un plasma : modélisation mathématique et simulation numérique.* Masson, (1994).

[1.24] M. SERMANGE, R. TEMAM, Some mathematical questions related to the MHD equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 635–664, (1983).

[1.25] J. SIMON, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata,* (IV), Vol. CXLVI, pp.65–96, (1987).

Chapter II

Weak solutions for compressible MHD equations

Submitted for publication: R. SART, Existence of finite energy weak solutions for the equations MHD of compressible fluids, (2007).

Abstract

This paper concerns the existence of global weak solutions for a compressible Magnetohydrodynamic model called MHD. We assume the viscosity and the resistivity to be constant and we prove that E. FEIREISL and P.–L. LIONS's strategies dedicated to the usual barotropic compressible flows may be extended to our system. The only difficulty to be taken into account is the magnetic field dependency. Viscosity and resistivity coefficients depending on density will be treated in a forthcoming paper following D. BRESCH and B. DESJARDINS's strategy.

2.1. Introduction

In tokamak devices for nuclear fusion experiments (like Jet, Tore-Supra, Iter) a strong magnetic field is externally applied to confine inside a torus a high temperature plasma of ions and electrons. Some equilibrium configuration should be obtained, but we need to take into account some non disruptive instabilities, which cannot be avoided and give rise to some anomalous transport.

MHD equations are generally used to describe a large class of these instabilities (see [2.6], [2.1]). For instance, the combined effect of the gradient of the equilibrium density and the curvature of the magnetic lines can generate convective motion, like Bénard convection in fluids (see [2.18] and references therein). A mathematical justification using bifurcation theory can be found in [2.18], [2.12], with Nash-Moser technics on Hölder spaces for such compressible MHD equations with unknowns the density, the velocity and the magnetic field (either with $p = a\rho$ or $p = \rho^\gamma$). Others kinds of instabilities are also usually studied using these MHD equations (tearing instability,...).

We can nowadays find several applications of MHD studies for instance for liquid metals or general ionized gases, that is why it is interesting to give some mathematical results about that kind of magnetic models, by some generalization of fluid mechanics studies.
Among the several works of P.–L. Lions, an important result in the study of viscous fluids is the terms of a full theory demonstrating the existence of global weak solutions of the equations of Navier-Stokes for compressible fluids, in isentropic regime, in N-space dimension ($N \geq 2$):

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \vec{u}) = 0,$$
$$\partial_t(\varrho \vec{u}) + \operatorname{div}(\varrho \vec{u} \otimes \vec{u}) + a\nabla(\varrho^\gamma) = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + \varrho f,$$

where $a > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu$, $\varrho = \varrho(t, x)$ is the density and $\vec{u} = (u^1(t, x), u^2(t, x), u^3(t, x))$ the velocity of the fluid in a bounded regular domain Ω, f denotes the exterior force.
The proof that P.–L. Lions elaborated was valuable under the constraint $\gamma \geq 9/5$.
In 2001, E. Feireisl, A. Novotný and H. Petzeltová published the article: "On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids" [2.9], ensuring the validity of this result in other cases: sometimes using some different methods, they managed to prove, in 3-dimension, the existence for $\gamma > 3/2$.
The goal of this present paper is to adapt this proof of [2.9] to the magnetic case. Such fluid motions are governed by a strongly coupled nonlinear system, more precisely, we have to take into account the additional term due to the Lorentz force

$$\varrho f = j \wedge B,$$

where j is given by the Ampère law, namely $j = \frac{\operatorname{curl} B}{\mu_0}$.
The magnetic field $\vec{B} = (B^1(t, x), B^2(t, x), B^3(t, x))$ satisfies the following Maxwell type equation:

$$\partial_t \vec{B} + \operatorname{curl}(\eta \operatorname{curl} \vec{B}) - \operatorname{curl}(\vec{u} \wedge \vec{B}) = \vec{0}.$$

It also satisfies the following boundary conditions:

$$\vec{B} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Some earlier results are related to this magnetic model. For instance, B. Ducomet and E. Feireisl have explored the case of such MHD model with temperature conductivity using a similar strategy in [2.8]. They proved the existence of global weak solutions especially for monoatomic gases. More precisely, they suppose some pressure term to behave asymptotically like the adiabatic form with $\gamma = 5/3$. An other study on a close subject is presented by J.–F. Gerbeau, C. Le Bris and T. Lelièvre [2.11] about a full construction of weak solutions of incompressible type for one fluid or two fluids MHD models.
Step by step, we are going here to go over the proofs of [2.9] again to get some existence result for the MHD system introduced before for the barotropic case $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$ for all $\gamma > \frac{3}{2}$ and we will insist on the parts where the coupling with the magnetic field $\vec{B}$ brings some modifications. In a forthcoming paper, we will consider the viscosity and resistivity coefficients depending on the density as in [2.4]. More general compressible MHD models may be considered, coupling the compressible Navier-Stokes equations with the complete Maxwell equations including an electric field E. The mathematical study of such system is postponed to a forthcoming work.

2.2. Statement of the problem

Putting together all what we have just said, we can recall here that the goal of this paper is to prove the existence of global in time weak solutions for the following system of equations:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \tag{2.1}$$

$$\partial_t(\varrho\vec{u}) + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u}) - \mathrm{curl}\vec{B}\wedge\vec{B} + a\nabla(\varrho^\gamma) = \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\vec{u}), \tag{2.2}$$

$$\partial_t\vec{B} + \mathrm{curl}(\eta\ \mathrm{curl}\vec{B}) - \mathrm{curl}(\vec{u}\wedge\vec{B}) = \vec{0}, \tag{2.3}$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \tag{2.4}$$

$$\vec{B}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.5}$$

$$\varrho_0 \geq 0,\ \varrho_0 \in L^\gamma(\Omega),\ B_0^i \in L^2(\Omega),\ \mathrm{div}\vec{B}_0 = 0,\ \vec{B}_0\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{|(\varrho\vec{u})(0)|^2}{\varrho_0} = 0 \text{ a.e on}\{\varrho_0 = 0\},\ \frac{|(\varrho\vec{u})(0)|^2}{\varrho_0} \in \left(L^1(\Omega)\right)^3,$$

with $\eta > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$, $a > 0$ and $\gamma > \frac{3}{2}$.
Our strategy will be first to apply a Galerkin method to an approximated problem and then to come back to the initial one by means of some limits.

2.2.1. Weak solutions

Definition 2.1. *We will understand as global in time weak solution of the system (2.1)–(2.6), functions ϱ, $\vec{u}$ and $\vec{B}$ satisfying the following points :*
$\triangleright$ $\varrho \geq 0$, $\varrho \in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))$, $\vec{u} \in \Big(L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))\Big)^3$, $\vec{B} \in \Big(L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))\Big)^3$
$\triangleright$ *Equations (2.1)–(2.3) hold in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$*
$\triangleright$ *Equation (2.1) is also satisfied in the sense of renormalized solutions, we say that, for any function $b \in C^1(\mathbb{R})$ such that $b'(x) = 0$ for $x \geq M$, we have in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$:*

$$\partial_t b(\varrho) + \mathrm{div}(b(\varrho)\vec{u})) + (b'(\varrho)\varrho - b(\varrho))\mathrm{div}\vec{u} = 0.$$

Remark
Under these conditions, the equation (2.1) is also satisfied for a bigger class of functions. Thanks to the Lebesgue convergence theorem, we insure that the preceding equality is true for any function $b \in C^1(0,\infty)\cap C[0,\infty)$ such that

$$\exists\theta \in (0,\frac{\gamma}{2});\ \forall z > 0,\ |b'(z)z| \leq c(z^\theta + z^{\frac{\gamma}{2}})$$

2.2.2. Main result

Theorem 2.2. *Let $\gamma > \frac{3}{2}$ and suppose that $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded domain of class $C^{2+\nu}$ with $\nu > 0$. Then there exists a weak solution $(\varrho,\vec{u},\vec{B})$ of the problem (2.1)–(2.3) completed with the boundary and initial conditions (2.4)–(2.6) in the sense of the Definition 2.1.*

What follows is the proof of that result.
We do not want to rewrite all the arguments presented in [2.9] for the existence of weak solutions for the compressible Navier-Stokes equations but we are going to concentrate on the magnetic vision.
In particular, we will not systematically talk again about what only concerns density and velocity, for that, we invit the reader to refer to [2.9] for more details. Nevertheless, we will precise how estimates and other properties of ϱ and $\vec{u}$ are unchanged in spite of the presence of a magnetic field, and we will of course give more details about $\vec{B}$ in particular what happen when we try to build an approximate solution and the needed convergences to get the limit.

2.3. The Faedo-Galerkin approximation

As in [2.9], we consider the following modified system for any parameter $\varepsilon, \delta > 0$ and a constant $\beta \geq 1$ large enough:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho \vec{u}) = \varepsilon \Delta \varrho, \tag{2.7}$$

$$\partial_t(\varrho \vec{u}) + \mathrm{div}(\varrho \vec{u} \otimes \vec{u}) - \mathrm{curl}\vec{B} \wedge \vec{B} + a\nabla(\varrho^\gamma) + \delta \nabla(\varrho^\beta) + \varepsilon \nabla \vec{u} \cdot \nabla \varrho =$$

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\vec{u}), \tag{2.8}$$

$$\partial_t \vec{B} + \mathrm{curl}(\eta\ \mathrm{curl}\vec{B}) - \mathrm{curl}(\vec{u} \wedge \vec{B}) = \vec{0},\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{2.9}$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \tag{2.10}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.11}$$

$$\nabla \varrho \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.12}$$

$$\varrho(0) = \varrho_0 \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega}),\ (\nu > 0),\ 0 < \underline{\varrho} \leq \varrho_0 \leq \overline{\varrho},\ \nabla \varrho_0 \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.13}$$

$$\vec{B}(0) = \vec{B}_0 \in (H^1(\Omega))^3,\ \mathrm{div}\vec{B}_0 = 0,\ \vec{B}_0 \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.14}$$

$$(\varrho \vec{u})(0) = \vec{q} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3. \tag{2.15}$$

These new considerations brings some regularity through the extra term in the mass equation, some better integrability on the density because of the δ-term related to the exponent β chosen as big as we need. It is then easier to build some approximate regular solutions since we also consider some more regularity for the initial conditions (2.13)–(2.15).
We begin to solve (2.7),(2.12),(2.13), in other words, we first build a density ϱ related to a velocity $\vec{u}$ and without having to deal with the magnetic field $\vec{B}$. Indeed, (2.7),(2.12) and (2.13) are independent of $\vec{B}$.

2.3.1. Neumann problem for the density

Lemma 2.3. *(Lemma 2.1 of [2.9])*
Assume $\vec{u}$ is a given vector function belonging to the class

$$\vec{u} \in C([0,T];[C^2(\overline{\Omega})]^3),\ \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Then the initial-boundary value problem (2.7),(2.12),(2.13) possesses a unique classical solution ϱ on the set $[0,T] \times \Omega$ such that $\varrho(t) \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega})$ for any fixed $t \in [0,T]$.

This lemma, coming from [2.9], is unchanged in our study that is to say that, supposing that $\vec{u} \in C\big([0,T];[C^2(\overline{\Omega})]^3\big)$ and through the regularized mass conservation (2.7), we can define an application

$$S\ :\ \vec{u} \in C\big([0,T];[C^2(\overline{\Omega})]^3\big) \mapsto \varrho \in C([0,T];C^{2+\nu}(\overline{\Omega})),$$

which also satisfies the following continuity property

$$\|S(\vec{u}_1) - S(\vec{u}_2)\|_{C([0,T];W^{1,2}(\Omega))} \leq Tc(\kappa,T)\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{C([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))},$$

for all $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ belonging to

$$M_\kappa = \big\{\vec{u} \in C([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))\ ;\ \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla\vec{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa,\ \forall t\big\}.$$

Moreover, such regularity for $\vec{u}$ allows us to keep the density bounded away from zero, as we supposed it for ϱ_0.
Then, in order solve (2.8), we are now led to deal with $\vec{u}$ and $\vec{B}$ together, in particular, we will use a Faedo-Galerkin scheme for $(\vec{u},\vec{B})$.

2.3.2. Construction of regular solutions

Consider X_n and Y_n two sequences of finite dimensional spaces. X_n is defined as in [2.9], for $n \in \mathbb{N}^*$, by

$$X_n = \big(\text{span}\{\psi_j, j = 1,...,n\}\big)^3,$$

where the functions ψ_j are smooth functions vanishing on $\partial\Omega$, for example the eigenfunctions of the Laplacian with Dirichlet boundary conditions.
Now let see what we will take for Y_n. Suppose that Ω is simply connected (see [2.18], p.30 sq), and define the space

$$E = \Big\{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^3; \text{div}\vec{v} = 0,\ \vec{v}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

Then, for $j \in \mathbb{N}^*$, consider the functions $\vec{v}_j \in E$ satisfying

$$\text{curl curl } \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j,$$

$$\text{curl } \vec{v}_j \wedge \vec{n}|_{\partial\Omega} = \vec{0}.$$

These functions $\vec{v}_j$ make up a suitable orthogonal system of smooth functions in the sense of the following scalar product on E, dense in E:

$$(\vec{v}_1|\vec{v}_2) = \int_\Omega \text{curl } \vec{v}_1 \cdot \text{curl } \vec{v}_2 \, dx.$$

Finally we take

$$Y_n = \text{span}\{\vec{v}_j, j = 1, ..., n\},$$

as the second sequence of finite dimensional spaces.
Then consider approximate solutions $\vec{u}_n \in C([0,T]; X_n)$, $\vec{B}_n \in C([0,T]; Y_n)$. These solutions must satisfy, for all $t \in [0,T]$, and all $(\psi, \phi) \in X_n \times Y_n$:

$$\int_\Omega \varrho(t)\vec{u}_n(t) \cdot \psi \, dx - \int_\Omega \vec{q} \cdot \psi \, dx = -\int_0^t \int_\Omega (\text{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \psi \, dxds \tag{2.16}$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega \big(\mu\Delta\vec{u}_n - \text{div}(\varrho\vec{u}_n \otimes \vec{u}_n) + \nabla((\lambda+\mu)\text{div}\vec{u}_n - a\varrho^\gamma - \delta\varrho^\beta) - \varepsilon\nabla\varrho.\nabla\vec{u}_n\big) \cdot \psi \, dxds,$$

$$\int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_\Omega \vec{B}_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_\Omega \big(\text{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \text{curl}(\eta \text{ curl}\vec{B}_n)\big) \cdot \phi \, dxds. \tag{2.17}$$

We note

$$\langle \mathcal{N}_1[\varrho, \vec{u}_n, \vec{B}_n], \psi \rangle = -\int_\Omega (\text{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \psi \, dx \tag{2.18}$$

$$+ \int_\Omega \big(\mu\Delta\vec{u}_n - \text{div}(\varrho\vec{u}_n \otimes \vec{u}_n) + \nabla((\lambda+\mu)\text{div}\vec{u}_n - a\varrho^\gamma - \delta\varrho^\beta) - \varepsilon\nabla\varrho.\nabla\vec{u}_n\big) \cdot \psi \, dx,$$

$$\langle \mathcal{N}_2[\varrho, \vec{u}_n, \vec{B}_n], \phi \rangle = \int_\Omega \big(\text{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \text{curl}(\eta \text{ curl}\vec{B}_n)\big) \cdot \phi \, dx, \tag{2.19}$$

and finally

$$\mathcal{N}[\varrho, \vec{u}_n, \vec{B}_n] = (\mathcal{N}_1[\varrho, \vec{u}_n, \vec{B}_n], \mathcal{N}_2[\varrho, \vec{u}_n, \vec{B}_n]).$$

Then, we have, for all (ψ, ϕ) in $X_n \times Y_n$,

$$\int_0^t \langle \mathcal{N}[\varrho(s), \vec{u}_n(s), \vec{B}_n(s)], (\psi, \phi) \rangle \, ds =$$

$$\int_\Omega \varrho(t)\vec{u}_n(t) \cdot \psi \, dx - \int_\Omega \vec{q} \cdot \psi \, dx + \int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \phi \, dx - \int_\Omega \vec{B}_0 \cdot \phi \, dx,$$

We introduce the operators

$$\mathcal{M}_1[f] \; : \; X_n \to X_n^* \; ; \; < \mathcal{M}_1[f]\vec{x}_1, \vec{x}_2 >= \int_\Omega f\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2,$$

$$\mathcal{M}_2[g] \; : \; Y_n \to Y_n^* \; ; \; < \mathcal{M}_2[g]\vec{y}_1, \vec{y}_2 >= \int_\Omega f\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2.$$

Let's recall here that the crucial point of this paragraph is the fact that, given by the regularity of the velocity and the mass conservation equation (2.7), we know that the density is bounded away from zero which implies that $\mathcal{M}_i[\varrho]$ are invertible, $i = 1, 2$. Moreover, these operators satisfy, ($E_1 = X_n$, $E_2 = Y_n$)

$$\|\mathcal{M}_i^{-1}[\varrho^1] - \mathcal{M}_i^{-1}[\varrho^2]\|_{\mathcal{L}(E_i^*, E_i)} \leq c(n, \eta)\|\varrho^1 - \varrho^2\|_{L^1(\Omega)},$$

for all ϱ^1, ϱ^2 in the set $N_\eta = \{\varrho \in L^1(\Omega)\ ;\ \varrho \geq \eta > 0,\ \forall x \in \Omega\}$.
So, noting $< h^*, \psi >= \int_\Omega h \cdot \psi\ dx$, we can rewrite the equality we need to solve as

$$\big(\vec{u}_n(t), \vec{B}_n(t)\big) = \Big(\mathcal{M}_1^{-1}[S(\vec{u}_n)(t)]\big(\vec{q}^{\ *} + \int_0^t \mathcal{N}_1[\varrho(s), \vec{u}_n(s), \vec{B}_n(s)]\ ds\big),$$

$$\mathcal{M}_2^{-1}[1(t)]\big(\vec{B}_0^* + \int_0^t \mathcal{N}_2[\varrho(s), \vec{u}_n(s), \vec{B}_n(s)]\ ds\big)\Big),$$

2.3.3. Fixed point theorem

The continuity of operators $\mathcal{M}_1^{-1}$, $\mathcal{M}_2^{-1}$ and S imply the existence of solutions of the problem (2.7),(2.16),(2.17), by a fixed point theorem, at least on an interval $[0, T(n)]$. To deduce the existence of global solutions on $[0, T]$, we have to show that $(\vec{u}_n, \vec{B}_n)$ stays bounded in $X_n \times Y_n$. Let see the following section.

2.3.4. Energy equality

For the equality (2.15) from [2.9], we must add the term due to the magnetic force, we obtain

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega \frac{1}{2}\varrho_n|\vec{u}_n|^2 + \frac{a}{\gamma - 1}\varrho_n^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1}\varrho_n^\beta + \frac{1}{2}|\vec{B}_n|^2\ dx\Big) + \eta\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2\ dx$$

$$+\mu\int_\Omega |\nabla\vec{u}_n|^2\ dx + (\lambda + \mu)\int_\Omega |\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\ dx + \varepsilon\int_\Omega (a\gamma\varrho_n^{\gamma-2} + \delta\beta\varrho_n^{\beta-2})|\nabla\varrho_n|^2\ dx = 0. \quad (2.20)$$

Proof
To get this equation, we differentiate (2.16) with respect to t and take $\psi = \vec{u}_n(t)$. Compared to the classical energy equation for what we can of course refer to [2.9], only one new term appears in the MHD case:

$$-\int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n).\vec{u}_n\ dx.$$

But, from an other hand, the equation (2.17) gives, for all t in $[0, T(n)]$ and all ϕ in Y_n,

$$\int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \phi\ dx - \int_\Omega \vec{B}_0 \cdot \phi\ dx = \int_0^t \int_\Omega \big(\mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \mathrm{curl}(\eta\ \mathrm{curl}\vec{B}_n)\big) \cdot \phi\ dxds.$$

Derivating with respect to t and then taking $\phi = \vec{B}_n(t)$, we obtain

$$\int_\Omega \partial_t \vec{B}_n \cdot \vec{B}_n \, dx + \int_\Omega \mathrm{curl}(\eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n) \cdot \vec{B}_n \, dx - \int_\Omega \mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{B}_n \, dx = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t |\vec{B}_n|^2 \, dx + \int_\Omega \eta |\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2 \, dx + \int_\Omega \eta \mathrm{div}(\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \, dx$$
$$- \int_\Omega (\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \mathrm{curl}\vec{B}_n \, dx - \int_\Omega \mathrm{div}((\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) \wedge \vec{B}_n) \, dx = 0,$$

and then

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t |\vec{B}_n|^2 \, dx + \int_\Omega \eta |\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2 \, dx =$$
$$\int_\Omega \mathrm{div}((\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n - \eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n) \wedge \vec{B}_n) \, dx - \int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{u}_n \, dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} ((\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{n} \, dx - \int_{\partial\Omega} \eta (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{n} \, dx - \int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{u}_n \, dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} (\vec{n} \wedge (\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n)) \cdot \vec{B}_n \, dx + \eta \int_{\partial\Omega} (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{n}) \cdot \vec{B}_n \, dx - \int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{u}_n \, dx.$$

But $\vec{n} \wedge (\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) = (\vec{u}_n.\vec{n})\vec{B}_n - (\vec{B}_n.\vec{n})\vec{u}_n$, so with the conditions (2.10) and (2.11), we conclude that

$$-\int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n) \cdot \vec{u}_n \, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t |\vec{B}_n|^2 \, dx + \int_\Omega \eta |\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2 \, dx. \ \square$$

We can deduce from this energy equation the estimates (2.18)–(2.23) of [2.9], with the modified

$$E_{\delta,0} = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\frac{|\vec{q}_0|^2}{\varrho_0} + \frac{a}{\gamma - 1}\varrho_0^\gamma + \frac{\delta}{\beta - 1}\varrho_0^\beta + \frac{1}{2}|\vec{B}_0|^2 \Big) \, dx,$$

and we can also join other estimates for $\vec{B}_n$. So let's give the following result

Lemma 2.4. *Let $\beta \geq 4$.*
The following estimates hold independently of n:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varrho_n(t)\|^\gamma_{L^\gamma(\Omega)} \leq c \, E_{\delta,0}, \tag{2.21}$$

$$\delta \sup_{t\in[0,T]} \|\varrho_n(t)\|^\beta_{L^\beta(\Omega)} \leq c \, E_{\delta,0}, \tag{2.22}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\sqrt{\varrho_n}(t)\vec{u}_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \, E_{\delta,0}, \tag{2.23}$$

$$\int_0^T \|\vec{u}_n(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c \, E_{\delta,0}, \tag{2.24}$$

$$\int_0^T \|\nabla \varrho_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le \frac{c(\beta,\delta,\varrho_0,\vec{q})}{\varepsilon}, \tag{2.25}$$

$$\|\varrho_n\|_{L^{\beta+1}((0,T)\times\Omega)} \le c(\varepsilon,\delta,\varrho_0,\vec{q}), \tag{2.26}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{B}_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le c\, E_{\delta,0}, \tag{2.27}$$

$$\int_0^T \|\mathrm{curl}\vec{B}_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le c\, E_{\delta,0}, \tag{2.28}$$

Proof
Except for (2.25) and (2.26), all these estimates are directly obtained by integrating (2.20) on $[0,T]$. To get (2.25) and (2.26), we will just briefly recall what is proposed in [2.9]. The energy gives the bounds

$$\|\varrho_n^{\frac{\beta}{2}}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \le c(\varepsilon,\delta), \quad \|\varrho_n^\beta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \le c(\delta).$$

By interpolation, and thinking to the embedding $W^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, we get

$$\|\varrho_n^\beta\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;L^2(\Omega))} \le c(\Omega)\|\varrho_n^\beta\|^{\frac{1}{4}}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\|\varrho_n^\beta\|^{\frac{3}{4}}_{L^1(0,T;L^3(\Omega))}$$

Then, for β large enough ($\beta \ge 3$), we finally get ϱ_n bounded in $L^{\beta+1}((0,T)\times\Omega)$ by a constant depending on δ and ε but not on n and we have justified (2.26).
For (2.25), we multiply (2.7) by ϱ_n and integrate by parts to obtain

$$\|\varrho_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\varrho_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\int_0^T \|\nabla\varrho_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt = \int_0^T\int_\Omega \varrho_n^2 \mathrm{div}\vec{u}_n\, dxdt.$$

Using Cauchy-Schwarz inequality and thinking to

$$\int_0^T \|\varrho_n^2\|^2_{L^2(\Omega)} \le T\sup_{t\in[0,T]} \|\varrho_n\|^4_{L^4(\Omega)},$$

we get

$$2\varepsilon\int_0^T \|\nabla\varrho_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le \|\varrho_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \sqrt{T}\|\varrho_n\|^2_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\Big(\int_0^T \|\nabla\vec{u}_n\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

and we conclude thanks to (2.22) and (2.24) supposing that $\beta \ge 4$. □

2.3.5. Limit

When n goes to infinity, we keep some properties related to the modified mass equation (2.7) only. The strong convergences of ϱ_n and $\nabla\varrho_n$, are not perturbed by the presence of $\vec{B}$, we have

$$\varrho_n \to \varrho \text{ in } L^4(0,T;L^4(\Omega)), \quad \nabla\varrho_n \to \nabla\varrho \text{ in } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

The first convergence can be directly obtained using the Aubin-Lions lemma, for the second one, we need some properties about the L^p-theory of parabolic equations, the proof is completely given in [2.9] and an important fact is that equation (2.7) is satisfied in a strong sense, let's recall it now

Lemma 2.5. *There exists $r > 1$ and $q > 2$ such that $\partial_t \varrho_n$, $\Delta\varrho_n$ are bounded in $L^r((0,T)\times\Omega)$, $\nabla\varrho_n$ is bounded in $L^q(0,T;L^2(\Omega))$ independently of n. Consequently, the limit function ϱ belongs to the same class and satisfies the equation (2.7) almost everywhere on $(0,T)\times\Omega$ and the boundary conditions (2.9) in the sense of traces.*

However, it is not so clear for other quantities like $\varrho_n\vec{u}_n$ because we are led to use the equation of velocity which, from now, contains a magnetic term. That is why we must be careful and prove that the convergence

$$\varrho_n\vec{u}_n \to \varrho\vec{u} \text{ in } C([0,T];L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\text{-weak}) \tag{2.29}$$

is right even in our new conditions.

Proof
In order to show (2.29), using Corollary 2.1 p.29 of [2.10], we must have uniform equicontinuity of

$$t \mapsto \int_\Omega \varrho_n(t)\vec{u}_n(t)\cdot\psi\ dx,$$

for any fixed ψ in a dense subset of $L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$. We choose the space X generated by the functions ψ_j, $j\in\mathbb{N}$ (cited in Section 2.3), which is dense in $L^2(\Omega)$ and also in $H^1(\Omega)$. So, let take $\psi\in X$, there exists $N\in\mathbb{N}$ such that $\psi\in X_N$, and then, thanks to (2.16), we can write, for all $n\geq N$,

$$\int_\Omega \varrho_n(t)\vec{u}_n(t)\cdot\psi\ dx - \int_\Omega \vec{q}\cdot\psi\ dx = -\int_0^t\int_\Omega(\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n)\cdot\psi\ dxds +$$

$$\int_0^t\int_\Omega\big(\mu\Delta\vec{u}_n - \text{div}(\varrho_n\vec{u}_n\otimes\vec{u}_n) + \nabla((\lambda+\mu)\text{div}\vec{u}_n - a\varrho_n^\gamma - \delta\varrho_n^\beta) - \varepsilon\nabla\varrho_n\cdot\nabla\vec{u}_n\big)\cdot\psi\ dxds$$

The uniform continuity of this last integral term is obtained in [2.9] using the bounds of ϱ_n and $\vec{u}_n$ with Lemma 2.4 of [2.9].
We must also show it for the term $\int_0^t\int_\Omega(\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n).\psi\ dxds$. Estimates (2.27) and (2.28) imply that $\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^1(\Omega))$:

$$\|\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}\leq c,$$

which is enough to show the expected uniform continuity. Indeed, we can write

$$\Big|\int_{t'}^t\int_\Omega(\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n)\cdot\psi\ dxds\Big| \leq c\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}|t-t'|^{\frac{1}{2}}.\ \square$$

These convergences held on, we are able to pass to the limit when n goes to $+\infty$ in all the $\vec{B}_n$-independent terms.
Now we must justify the convergences in all the statements containing $\vec{B}_n$. First, let deal with the convergence of the magnetic field $\vec{B}_n$. Estimates (2.27) and (2.28) give convergences of $\vec{B}_n$ weakly star in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ and weakly in $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$. As for $\varrho_n\vec{u}_n$, we have to show a strong convergence for $\vec{B}_n$ in particular in order to pass to the limit for $n\to+\infty$ in the terms curl $\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n$ and $\text{curl}(\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n)$. In fact, we have

Proposition 2.6.

$$\vec{B}_n \to \vec{B} \text{ in } C([0,T];L^2(\Omega)\text{-weak}),$$

and thanks to the compact embedding $L^2(\Omega) \subset W^{-1,2}(\Omega)$, we also have

$$\vec{B}_n \to \vec{B} \text{ in } C([0,T];W^{-1,2}(\Omega)). \tag{2.30}$$

Proof

We are going to use Corollary 2.1 p.29 of [2.10] to show the first convergence. For that we have to prove that

$$t \mapsto \int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \phi \, dx$$

is uniformly continuous for any ϕ in a dense subset of $L^2(\Omega)$. Let us remind that the functions v_j, $j \in \mathbb{N}$, (cited in Section 2.3), make up a suitable orthogonal system dense in E and also in $\{v \in (L^2(\Omega))^3; \mathrm{div}\vec{v} = 0,\ \vec{v}.\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0\}$. That is why we can take, as a dense subset of $L^2(\Omega)$, the space F generated by the functions $v_j + \nabla\varphi$, $j \in \mathbb{N}$, where $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. And we note

$$F_n = \left\{ \overline{\phi} = \phi + \nabla\varphi,\ \phi \in Y_n,\ \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \right\}.$$

Then, as for $\varrho_n\vec{u}_n$, we want to use the corresponding equation (2.17), but the problem is that this equation holds only for $\phi \in Y_n$. Nevertheless, since $\mathrm{div}\vec{B}_n = 0$, (because $\vec{B}_n \in C([0,T];Y_n)$), we also have, for any $\overline{\phi} = \phi + \nabla\varphi \in F_n$,

$$\int_\Omega \vec{B}_n(t) \cdot \overline{\phi} \, dx - \int_\Omega \vec{B}_0 \cdot \phi \, dx = \int_0^t \int_\Omega \left(\mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \mathrm{curl}(\eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n)\right) \cdot \overline{\phi} \, dxds.$$

So, we are now led to show uniform equi-continuity of

$$t \mapsto f_n(t) = \int_0^t \int_\Omega \left(\mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) - \mathrm{curl}(\eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n)\right) \cdot \overline{\phi} \, dxds,$$

for any fixed $\overline{\phi} \in F$. We can first remark that the conditions $\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{n}|_{\partial\Omega} = \vec{0}$ and $\vec{u}_n|_{\partial\Omega} = \vec{0}$ imply that

$$f_n(t) = \int_0^t \int_\Omega (\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n - \eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n) \cdot \mathrm{curl}\overline{\phi} \, dxds.$$

On the one hand, $\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, we deduce that $\eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On the other hand, $\vec{u}_n$ bounded in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and $\vec{B}_n$ bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ imply that the sequence $\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$. We can then conclude that

$$\|\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n - \eta \, \mathrm{curl}\vec{B}_n\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq c,$$

and finally write, since $F \subset L^3(\Omega)$,

$$|f_n(t) - f_n(t')| \leq c\|\overline{\phi}\|_{L^3(\Omega)}|t - t'|^{\frac{1}{2}}.$$

We get the second convergence thanks to the compactness of the embedding $L^2(\Omega) \subset W^{-1,2}(\Omega)$. □

Boundary conditions.
The trace operator $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ is linear and continuous and also weakly continuous. That is why, from the convergence

$$\vec{B}_n \rightharpoonup \vec{B} \text{ in } L^2(0,T;H^1(\Omega))\text{-weak},$$

we deduce

$$\vec{B}_n \rightharpoonup \vec{B} \text{ in } L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))\text{-weak}.$$

Since $\vec{B}_n$ is in $C([0,T];Y_n)$, we have $\vec{B}_n \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0$ and then, in the sense of $L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$, we also obtain

$$\vec{B} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Initial conditions.
We know that $\vec{B}_n(0)$ is in Y_n and from (2.17) we have

$$\vec{B}_n(0) = P_{Y_n}\vec{B}_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j,$$

where P_{Y_n} stands for the orthogonal projector on Y_n in $L^2(\Omega)$. We get the following convergence, in $(L^2(\Omega))^3$:

$$P_n\vec{B}_0 \to \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \vec{v}_j = \vec{B}_0.$$

Since $\vec{B}_n \to \vec{B}$ in $C([0,T];W^{-1,2}(\Omega))$, we have

$$\vec{B}_n(0) \to \vec{B}(0) \text{ in } W^{-1,2}(\Omega),$$

so $\vec{B}$ satisfies (2.14).

Then let see the terms $\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n$ and $\mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n)$.
We have just shown that $\vec{B}_n \to \vec{B}$ in $C([0,T];W^{-1,2}(\Omega))$ and we know that $\vec{u}_n$ is bounded in $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, so we conclude:

$$\mathrm{curl}(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n) \to \mathrm{curl}(\vec{u} \wedge \vec{B}) \text{ in } \mathcal{D}'((0,T) \times \Omega).$$

For the second term, it is not so straight. Estimates (2.28) and Proposition 2.6 only give some convergence

$$\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n \to f \text{ in } L^\infty(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega)).$$

what is very weak and not really interesting for the limit equation of $\vec{B}$.

Nevertheless, since $\vec{B}_n$ is in E, we have $\mathrm{div}\vec{B}_n = 0$, so we can write:

$$\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n = \mathrm{div}(\vec{B}_n \otimes \vec{B}_n) - \nabla(\frac{1}{2}\vec{B}_n^2).$$

Using the fact that $\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ and the convergence (2.30), we can assure the convergence

$$\mathrm{div}(\vec{B}_n \otimes \vec{B}_n) - \nabla(\frac{1}{2}\vec{B}_n^2) \to \mathrm{div}(\vec{B} \otimes \vec{B}) - \nabla(\frac{1}{2}\vec{B}^2) \text{ in } \mathcal{D}'((0,T) \times \Omega).$$

Then, in order to have the expected convergence $\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n \to \mathrm{curl}\vec{B} \wedge \vec{B}$ in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$, we wonder if we also have a similar relation on the limit $\vec{B}$ like

$$\mathrm{div}(\vec{B} \otimes \vec{B}) - \nabla(\frac{1}{2}\vec{B}^2) = \mathrm{curl}\vec{B} \wedge \vec{B},$$

in other words, we would like to have $\mathrm{div}\vec{B} = 0$.
We can remark that taking the divergence of the limit equation (2.9) satisfied by the limits $\vec{u}$ and $\vec{B}$ in the sense of $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ (refering to (2.24) and (2.30)), we deduce that $\frac{d}{dt}\mathrm{div}\vec{B}(t) = 0$, and thanks to the initial condition $\mathrm{div}\vec{B}_0 = 0$, we conclude

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0,$$

and the proof is complete.

Here is now the existence result derived from this limit $n \to +\infty$:

Lemma 2.7. *Suppose that the initial data $\varrho_0, \vec{q}, \vec{B}_0$ satisfy the conditions (2.13) and (2.14). Then there exists a weak solution $(\varrho, \vec{u}, \vec{B}) = (\varrho_{\delta,\varepsilon}, \vec{u}_{\delta,\varepsilon}, \vec{B}_{\delta,\varepsilon})$ of the problem (2.7)–(2.14) such that*

$$\varrho \in L^{\beta+1}((0,T) \times \Omega),$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varrho(t)\|^{\gamma}_{L^{\gamma}(\Omega)} \leq c\ E_{\delta,0}, \tag{2.31}$$

$$\delta \sup_{t\in[0,T]} \|\varrho(t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\Omega)} \leq c\ E_{\delta,0}, \tag{2.32}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\sqrt{\varrho}(t)\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\ E_{\delta,0}, \tag{2.33}$$

$$\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt \leq c\ E_{\delta,0}, \tag{2.34}$$

$$\varepsilon \int_0^T \|\nabla\varrho(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt \leq c(\beta, \delta, \varrho_0, \vec{q}), \tag{2.35}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{B}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\ E_{\delta,0}, \tag{2.36}$$

$$\int_0^T \|\mathrm{curl}\vec{B}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt \leq c\ E_{\delta,0}. \tag{2.37}$$

2.4. The vanishing viscosity limit

In this section, δ is fixed and we will make ε go to 0. Through this limit, we are going to loose information on ϱ, in particular a strong convergence, because estimate (2.35) is of course not independent of ε. At least, we need to have weak convergences of the quantities ϱ^γ and ϱ^β in spaces $L^r((0,T)\times\Omega)$ with $r>1$ and to conclude their convergences in the sense of $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$.

2.4.1. Integrability of the density

Bogovskii operator.
Let's consider the problem

$$\mathrm{div}\vec{v} = f,\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Associating a solution $\vec{v}$ of this problem to some function f, defines a bounded linear operator $\mathcal{B} : \left\{f \in L^p(\Omega)\ ;\ \int_\Omega f = 0\right\} \mapsto [W_0^{1,p}(\Omega)]^3$ (that we could call the inverse of the divergence to fix ideas) initially constructed by Bogovskii.
Refering to [2.3], let's recall its properties:

$$\mathrm{div}\big(\mathcal{B}[f]\big) = f \text{ in } \Omega,\ \mathcal{B}[f]|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\|\mathcal{B}[f]\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le c(p)\|f\|_{L^p(\Omega)},\ \forall 1<p<+\infty,$$

and if $f=\mathrm{div}\vec{g}$, with $\vec{g}\in L^r(\Omega)$ such that $\vec{g}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega}=0$, we also have for any $1<r<+\infty$,

$$\|\mathcal{B}[f]\|_{L^r(\Omega)} \le c(r)\|\vec{g}\|_{L^r(\Omega)}.$$

To get some interesting information on the density, we are going to "test" equation (2.8) with functions constructed with $\mathcal{B}$, so we consider the quantities $\psi(t)\mathcal{B}_i\left[\varrho_\varepsilon - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varrho_\varepsilon(t)dx\right]$, $\psi\in\mathcal{D}(0,T)$, $0\le\psi\le1$, as test functions, we get

$$\int_0^T\int_\Omega \psi(a\varrho_\varepsilon^{\gamma+1} + \delta\varrho_\varepsilon^{\beta+1})\ dxdt = m_0\int_0^T\psi\int_\Omega(a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta)\ dxdt$$

$$+\int_0^T\psi(t)\int_\Omega(\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon\wedge\vec{B}_\varepsilon)\cdot\mathcal{B}[\varrho_\varepsilon - m_0]\ dxdt + (\lambda+\mu)\int_0^T\psi\int_\Omega\varrho_\varepsilon\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon\ dxdt -$$

$$\int_0^T\partial_t\psi\int_\Omega\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i\mathcal{B}[\varrho_\varepsilon - m_0]\ dxdt + \mu\int_0^T\psi\int_\Omega\partial_{x_j}u_\varepsilon^i\partial_{x_j}\mathcal{B}_i[\varrho_\varepsilon - m_0]\ dxdt -$$

$$\int_0^T\psi\int_\Omega\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j\partial_{x_j}\mathcal{B}_i[\varrho_\varepsilon - m_0]\ dxdt + \varepsilon\int_0^T\psi\int_\Omega\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i\mathcal{B}_i[\Delta\varrho_\varepsilon]\ dxdt -$$

$$\int_0^T\psi\int_\Omega\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i\mathcal{B}_i[\mathrm{div}(\varrho_\varepsilon\vec{u}_\varepsilon)]\ dxdt + \varepsilon\int_0^T\psi\int_\Omega\partial_{x_j}u_\varepsilon^i\partial_{x_j}\varrho_\varepsilon\mathcal{B}_i[\varrho_\varepsilon - m_0]\ dxdt.$$

Copying the proof of (3.3) from [2.9], we have to be sure that all the terms of the right hand side are bounded independently of ε. Here we are going to deal with the only additional term:

$$\int_0^T \psi(t) \int_\Omega (\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon) \cdot \mathcal{B}[\varrho_\varepsilon - m_0]\; dxdt.$$

So let's see what we get:
• $\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon$ is bounded in $L^2(0,T;L^1(\Omega))$, thanks to (2.36) and (2.37).
• the density ϱ_ε is bounded in $L^\infty(0,T;L^\beta(\Omega))$, so $\mathcal{B}[\varrho_\varepsilon - m_0]$ is bounded in the space $L^\infty(0,T;W^{1,\beta}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ as $\beta > 4$.
All the other terms are bounded too as it is detailed in [2.9], (combining the estimates given in lemma 2.7, some Hölder inequalities and properties of the Bogovkii operator). The conclusion follows: the estimate (3.3) of [2.9] holds in our conditions, that is to say:

Lemma 2.8. *Let ϱ_ε, $\vec{u}_\varepsilon$, $\vec{B}_\varepsilon$ be a sequence of solutions of (2.7)–(2.15), then there exists a constant depending on δ, ϱ_0, $\vec{q}$ but not on ε, such that*

$$\|\varrho_\varepsilon\|_{L^{\gamma+1}((0,T)\times\Omega)} + \|\varrho_\varepsilon\|_{L^{\beta+1}((0,T)\times\Omega)} \leq c(\delta, \varrho_0, \vec{q}).$$

2.4.2. Limit

From the one hand, by Section 2.4.1 and (2.31)–(2.35), we deduce all the necessary convergences of $\varrho_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon$, cited in Section 3.3 of [2.9], to pass to the limit when ε goes to zero. Indeed, (2.34) and (2.35) easily give

$$\varepsilon \nabla \varrho_\varepsilon \cdot \nabla \vec{u} \to 0 \text{ in } \Big(L^1((0,T)\times\Omega)\Big)^3,$$

$$\varepsilon \Delta \varrho_\varepsilon \to 0 \text{ in } L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega)),$$

and by virtue of (2.32), the preceding lemma 2.8 and (2.34) we get

$$\varrho_\varepsilon \to \varrho \text{ in } C([0,T], L^\beta_w(\Omega)), \tag{2.38}$$

$$\varrho_\varepsilon \rightharpoonup \varrho \text{ in } L^{\beta+1}((0,T)\times\Omega),$$

$$\vec{u}_\varepsilon \rightharpoonup \vec{u} \text{ in } L^2(0,T;W^{1,2}_0(\Omega)).$$

For the nonlinear term $\varrho_\varepsilon \vec{u}_\varepsilon \otimes \vec{u}_\varepsilon$, we can take again the ideas of paragraph 2.3.5 in the limit case with n. In particular, we obtain the convergence

$$\varrho_\varepsilon \vec{u}_\varepsilon \to \varrho \vec{u} \text{ in } C([0,T]; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)). \tag{2.39}$$

The only, but very important, difference with the n-limit is that we do not have a strong convergence for the density any more. We can only call p the weak limit of the quantity $a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta$. Showing that $p = a\varrho^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta$ will be the subject of the next paragraph.

From an other hand (2.36) and (2.37) give weak convergences of $\vec{B}_\varepsilon$ but, of course, we need more, especially for $\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon$ and $\mathrm{curl}(\vec{u}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon)$. Now let's show a strong convergence for $\vec{B}_\varepsilon$.
We already know that $\vec{B}_\varepsilon$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ and $\vec{u}_\varepsilon$ is bounded in $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, independently of ε, so by virtue of (2.9), we get $\partial_t\vec{B}_\varepsilon$ bounded in $L^2(0,T;W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega))$. By Corollary 6 of [2.19], we conclude, that $\vec{B}_\varepsilon \to \vec{B}$ in the space $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
This is enough to conclude then:

$$\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon \to \mathrm{curl}\vec{B} \wedge \vec{B} \text{ in } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega),$$

$$\mathrm{curl}(\vec{u}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon) \to \mathrm{curl}(\vec{u} \wedge \vec{B}) \text{ in } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega).$$

The boundednesses given by (2.34), (2.36), (2.37) are independent of ε, so we can, as in Section 2.3.5, use Corollary 2.1 of [2.10] to show that

$$\vec{B}_\varepsilon \to \vec{B} \text{ in } C([0,T];L^2(\Omega)\text{-weak}),$$

and then pass to the limit in the initial conditions.
Then, the goal is to show that the weak limit p of $a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta$ is equal to $a\varrho^\gamma + \delta\varrho^\beta$.

2.4.3. The effective viscous flux

This paragraph is devoted to the proof of

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^T \psi \int_\Omega \phi\big(a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta - (\lambda+2\mu)\mathrm{div}\vec{u}_\varepsilon\big)\varrho_\varepsilon \, dxdt =$$

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi\big(p - (\lambda+2\mu)\mathrm{div}\vec{u}\big)\varrho \, dxdt.$$

Proof
Consider $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ and $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and the operator $\mathcal{A}_i = \Delta^{-1}\partial_{x_i}$, where Δ^{-1} stands for the inverse of the Laplacian operator on $\mathbb{R}^3$. Then, using for $i = 1,2,3$ $\varphi_i(t,x) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon]$ as test functions for equation (2.8), for ϱ_ε prolonged by zero to $\mathbb{R}^3$, we get

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi\big((a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta) - (\lambda+2\mu)\mathrm{div}\ \vec{u}_\varepsilon\big)\varrho_\varepsilon \, dxdt = \tag{2.40}$$

$$(\lambda+\mu)\int_0^T \psi \int_\Omega \mathrm{div}\ \vec{u}_\varepsilon\ \partial_{x_i}\phi\ \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon]\, dxdt + \int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon)\cdot \mathcal{A}[\varrho_\varepsilon]\, dxdt$$

$$-\int_0^T \psi \int_\Omega (a\varrho_\varepsilon^\gamma + \delta\varrho_\varepsilon^\beta)\ \partial_{x_i}\phi\ \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon]\, dxdt + \mu\int_0^T \psi \int_\Omega \partial_{x_j}u_\varepsilon^i\ \partial_{x_j}\phi\ \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon]\, dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \psi \int_\Omega \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i u_\varepsilon^j \; \partial_{x_j}\phi \; \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] \; dxdt - \int_0^T \partial_t \psi \int_\Omega \phi \; \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i \; \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] \; dxdt \\
&+\varepsilon \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \; \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i \; \mathcal{A}_i[\operatorname{div}(1_\Omega \nabla \varrho_\varepsilon)] \; dxdt + \varepsilon \int_0^T \psi \int_\Omega \phi \; \partial_{x_j}\varrho_\varepsilon \; \partial_{x_j} u_\varepsilon^i \; \mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] \; dxdt \\
&+\mu \int_0^T \psi \int_\Omega \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^i \; \partial_{x_i}\phi \; dxdt - \mu \int_0^T \psi \int_\Omega u_\varepsilon^i \; \partial_{x_j}\phi \; \partial_{x_j}\mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] \; dxdt \\
&+\int_0^T \psi \int_\Omega \phi \; u_\varepsilon^i \big(\varrho_\varepsilon \mathcal{R}_{i,j}[\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^j] - \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^j \mathcal{R}_{i,j}[\varrho_\varepsilon]\big) \; dxdt,
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{R}_{i,j}[v] = \partial_{x_j}\mathcal{A}_i[v]$ and where we have noted $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$.

A second (and very similar) equality can be found using the test functions $\psi\phi\mathcal{A}_i[\varrho]$ for the weak limit of (2.8), the work is then to show that all the terms in the right hand side of the first equality tend to their respective counterparts in the second one.
The operator $\mathcal{A}$ satisfies

$$\partial_{x_i}\mathcal{A}_i[v] = v,$$

and the L^p-theory of elliptic problems give

$$\|\mathcal{A}_i v\|_{W^{1,s}(\Omega)} \leq c(s,\Omega)\|v\|_{L^s(\mathbb{R}^3)}, \; \forall 1 < s < +\infty. \tag{2.41}$$

Some compactnesses about $\mathcal{A}$ are useful to get the expected convergence of (2.40). Putting together (2.38) and (2.41), we get

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] &\to \mathcal{A}_i[\varrho] \text{ in } C(\overline{(0,T)\times\Omega}), \\
\partial_{x_j}\mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] &\to \partial_{x_j}\mathcal{A}_i[\varrho] \text{ in } C([0,T]; L_w^\beta(\Omega)),
\end{aligned}
$$

and using a $L^p - L^q$ version of a classical div$-$curl lemma together with the already known convergences (2.38) with the additional condition $\beta > \frac{6\gamma}{2\gamma-3}$ and (2.39), we also have

$$\varrho_\varepsilon \mathcal{R}_{i,j}[\varrho_\varepsilon u_\varepsilon^j] - \varrho_\varepsilon u_\varepsilon^j \mathcal{R}_{i,j}[\varrho_\varepsilon] \to \varrho \mathcal{R}_{i,j}[\varrho u^j] - \varrho u^j \mathcal{R}_{i,j}[\varrho] \text{ in } L^2(0,T; W^{-1,2}(\Omega)).$$

These informations directly give the convergence of the integral terms of (2.40). We refer to [2.9] for the complete proof of these points. Note that some of the preceding results need to be defined on the whole space $\mathbb{R}^3$ because of the definition of the operator Δ^{-1}. An important remark at this stage consist in observing that the prolonged functions density and velocity (by zero) to the whole space $\mathbb{R}^3$ satisfies the mass equation in the sense of $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^3)$.
The last thing we must justify here is the convergence of the magnetic term

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\operatorname{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon).\mathcal{A}[\varrho_\varepsilon] \; dxdt \to \int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\operatorname{curl}\vec{B} \wedge \vec{B}) \cdot \mathcal{A}[\varrho] \; dxdt.$$

We can assure it for ϕ and ψ in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ because $\mathcal{A}_i[\varrho_\varepsilon] \to \mathcal{A}_i[\varrho]$ in $C(\overline{(0,T)\times\Omega})$, (see [2.9]) and $\operatorname{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon \to \operatorname{curl}\vec{B} \wedge \vec{B}$ in $L^1(0,T;L^1(\Omega))$-weak. Indeed, we know that $\vec{B}_\varepsilon \to \vec{B}$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $\operatorname{curl}\vec{B}_\varepsilon \rightharpoonup \operatorname{curl}\vec{B}$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$).
So we have the required conclusion. □

From this point, and to get the final strong convergence of the density we can refer to [2.9] because all what is done to get the desired conclusion $p = a\varrho^\gamma + \delta\varrho^\beta$ do not depend on the magnetic field. The only point to take care of was the preceding. Just to say some words, we can recall that the strategy consist in taking advantage of the mass equation in the sense of renormalized solutions for the function $b(z) = z\log(z)$, giving

$$\int_0^T \int_\Omega \varrho_\varepsilon \text{div}\vec{u}_\varepsilon \; dxdt \le \int_\Omega \varrho_0 \log(\varrho_0) \; dx - \int_\Omega \varrho_\varepsilon(T)\log(\varrho_\varepsilon(T)) \; dx$$

and the information about the effective viscous flux given at the beginning of this paragraph.

2.5. Passing to the limit in the artifical pressure term

It is time to consider now general initial data ϱ_0, $\vec{q}_0$ and $\vec{B}_0$ satisfying (2.6) and to get, by letting δ go to zero, solutions of the initial system

$$\begin{gathered}
\partial_t\varrho + \text{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \\
\partial_t(\varrho\vec{u}) + \text{div}(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u}) - \text{curl}\vec{B}\wedge\vec{B} + a\nabla(\varrho^\gamma) + \delta\nabla(\varrho^\beta) = \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\text{div}\vec{u}), \\
\partial_t\vec{B} + \text{curl}(\eta\;\text{curl}\vec{B}) - \text{curl}(\vec{u}\wedge\vec{B}) = \vec{0}, \\
\vec{u}|_{\partial\Omega} = \vec{0}, \\
\vec{B}.\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\
\varrho(0) = \varrho_0,\ (\varrho\vec{u})(0) = \vec{q},\ \vec{B}(0) = \vec{B}_0.
\end{gathered}$$

For that, we first consider a sequence of initial conditions $\varrho_{0,\delta} \in C^{2+\nu}(\overline{\Omega})$ and $\vec{q}_\delta \in \left(C^2(\overline{\Omega})\right)^3$ satisfying (2.13), (2.15) and such that

$$\begin{gathered}
\varrho_{0,\delta} \to \varrho_0 \text{ in } L^\gamma(\Omega), \\
\vec{q}_\delta \to \vec{q} \text{ in } \left(L^1(\Omega)\right)^3.
\end{gathered}$$

For each parameter δ, we can choose $\varrho_{0,\delta}$ such that (see [2.9]) :

$$0 < \delta \le \varrho_{0,\delta} \le \delta^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{2.42}$$

We know, thanks to the previous section, that there exists, for initial data $\varrho_{0,\delta}$, $\vec{q}_\delta$, $\vec{B}_{0,\delta}$ satisfying (2.13), (2.14) and (2.15), a weak solution $(\varrho,\vec{u},\vec{B}) = (\varrho_\delta,\vec{u}_\delta,\vec{B}_\delta)$ of this system. we also remark that the estimates (2.31)–(2.37) hold with E_0 independent of δ. Then, we expect to obtain a solution of our initial system through the limit $\delta \to 0$. Moreover, the mass conservation equation holds in the sense of renormalized solutions in $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ provided ϱ and $\vec{u}$ are prolonged by zero on $\mathbb{R}^3$ and we have the estimates (2.31)–(2.37), (except (2.35)) for $(\varrho_\delta,\vec{u}_\delta,\vec{B}_\delta)$.

2.5.1. Integrability of the density

One more time, we will have to show some more integrability for ϱ_δ in order to have, at least, a weak convergence. We can't hope for ϱ_δ to be bounded in $L^{\beta+1}$ or $L^{\gamma+1}$ as in Section 2.4.1 but we can show that we have

Lemma 2.9. *Let $\gamma > \frac{3}{2}$. There exists a constant $\theta > 0$ such that*

$$\int_0^T \int_\Omega a\varrho_\delta^{\gamma+\theta} + \delta\varrho_\delta^{\beta+\theta}\ dxdt \leq c.$$

Proof
We can take exactly the same way as in [2.9]. Since the mass equation is satisfied in the sense of renormalized solutions on $(0,T)\times \mathbb{R}^3$, we can regularize it as follows

$$\partial_t S_m[b(\varrho)] + \operatorname{div}(S_m[b(\varrho)]\vec{u}) + S_m\big[\big(b'(\varrho)\varrho - b(\varrho)\big)\operatorname{div}\vec{u}\big] = r_m,$$

where S_m is a standard smoothing operator. This equation justifies the regularity of the functions S_m, thus allowing us to choose some appropriate test functions depending on the Bogovskii operator $\mathcal{B}$ for (2.8), as:

$$\varphi(t,x) = \psi(t)\mathcal{B}\Big[S_m[b(\varrho_\delta)] - \int_\Omega S_m[b(\varrho_\delta)]\ dx\Big],\ \psi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Approximating the function $z^\theta \approx b(\varrho)$, we get an equality in which we only take care here of the added term coming from the magnetic influence

$$I_8 = \int_0^T \psi \int_\Omega (\operatorname{curl}\vec{B}_\delta \wedge \vec{B}_\delta)\cdot \mathcal{B}[\varrho_\delta^\theta - \int \varrho_\delta^\theta\ dx]\ dxdt,$$

for which we would like some estimate as $|I_8| \leq c$, independently of δ.
If $\theta < \frac{\gamma}{3}$ then ϱ_δ^θ is bounded in $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ with $p>3$, thanks to (2.31). In the case $p>3$, we have $W^{1,p}\subset L^\infty$, so:

$$\Big|\Big|\mathcal{B}_i[\varrho_\delta^\theta - \int \varrho_\delta^\theta\ dx]\Big|\Big|_{L^\infty} \leq c\Big|\Big|\mathcal{B}_i[\varrho_\delta^\theta - \int \varrho_\delta^\theta\ dx]\Big|\Big|_{W^{1,p}} \leq c'\Big|\Big|\varrho_\delta^\theta - \int \varrho_\delta^\theta\ dx\Big|\Big|_{L^p}.$$

We can deduce that $\mathcal{B}_i[\varrho_\delta^\theta - \int \varrho_\delta^\theta\ dx]$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$.
As ψ is in $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ too, it is then enough to justify that $\operatorname{curl}\vec{B}_\delta\wedge\vec{B}_\delta$ is bounded in $L^1(0,T;L^1(\Omega))$. But we have already seen that it is even true in $L^2(0,T;L^1(\Omega))$, so the proof is complete. □

Then comes the question of what happens when δ goes to 0. As ϱ_δ satisfies the same estimates as $\varrho_{\delta,\varepsilon}$ in Lemma 2.7, independently of δ, by virtue of (2.42), we can adapt Section 2.4.2 to obtain the same convergences for ϱ_δ, $\vec{u}_\delta$, $\vec{B}_\delta$, and even for $\varrho_\delta\vec{u}_\delta$, which is important for the nonlinear terms. Let also remark that making use of lemma 2.9, we know

$$\delta\varrho_\delta^\beta \to 0 \text{ in } L^1((0,T)\times\Omega).$$

Nevertheless, we must be careful about the case of the pressure, indeed, we are able to say that $a\varrho_\delta^\gamma \to \overline{a\varrho^\gamma}$ but not more. So, the limit $\delta\to 0$ is quite clear, the only last proof will consist in showing that the weak limit $\overline{\varrho^\gamma}$ of ϱ_δ^γ, is in fact equal to ϱ^γ.
The only modification in the last part of the paper [2.9] appears in Lemma 4.2.

2.5.2. The effective viscous flux

The original idea of Feireisl–Novotný–Petzeltová given in [2.9] consist in using cut-off functions to control the density. More precisely, let T be a regular function on $\mathbb{R}$ such that $T(z) = z$ for $|z| \leq 1$, $T(z) = 2$ for $z \geq 3$ and T concave and build a sequence of functions T_k defined by $T_k(z) = kT(\frac{z}{k})$. We have the following result:

Lemma 2.10.

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^T \psi \int_\Omega \phi\big(a\varrho_\delta^\gamma - (\lambda+2\mu)\mathrm{div}\vec{u}_\delta\big)T_k(\varrho_\delta)\ dxdt =$$

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi\big(a\overline{\varrho^\gamma} - (\lambda+2\mu)\mathrm{div}\vec{u}\big)\overline{T_k(\varrho)}\ dxdt.$$

Proof
We will not detail much more than in subsection 2.4.3, the strategy of [2.9] for this last proof is similar to what we done in 2.4.3 but more complicated. We will limit our talk to what is new in our magnetic context. So, using the same test functions $\varphi_i(t,x) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_i[T_k(\varrho_\delta)]$, $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ as in [2.9], we get the equation (4.16) of [2.9] with a new term:

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\mathrm{curl}\vec{B}_\delta \wedge \vec{B}_\delta).\mathcal{A}[T_k(\varrho_\delta)]\ dxdt.$$

In order to keep the validity of this result, we just have to prove that

$$\int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\mathrm{curl}\vec{B}_\delta \wedge \vec{B}_\delta)\cdot\mathcal{A}[T_k(\varrho_\delta)]\ dxdt \to \int_0^T \psi \int_\Omega \phi(\mathrm{curl}\vec{B} \wedge \vec{B})\cdot\mathcal{A}[\overline{T_k(\varrho)}]\ dxdt.$$

- ϕ,ψ are in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$.
- $\mathrm{curl}\vec{B}_\varepsilon \wedge \vec{B}_\varepsilon \to \mathrm{curl}\vec{B}\wedge\vec{B}$ in $L^1(0,T;L^1(\Omega))$-weak, as in Section 2.4.3.
- $T_k(\varrho_\delta) \to \overline{T_k(\varrho)}$ in $C([0,T];L^p(\Omega)\text{-weak})$ for all $1 \leq p < \infty$ (see [2.9]), so:

$$\mathcal{A}_i[T_k(\varrho_\delta)] \to \mathcal{A}_i[\overline{T_k(\varrho)}] \text{ in } C([0,T];W^{1,p}(\Omega)\text{-weak}),$$

in particular for $p > 3$.
By this last condition, the inclusion $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ is compact, and we can conclude that

$$\mathcal{A}_i[T_k(\varrho_\delta)] \to \mathcal{A}_i[\overline{T_k(\varrho)}] \text{ in } C(\overline{(0,T)\times\Omega}).$$

Putting these points together, we have shown the desired convergence. □

The crucial argument that achieves the proof of this existence result is the very point which separates the E. FEIREISL's and P.–L. LIONS' approach for that kind of problems. Instead of looking for a density integrability in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, (in order to use the Di Perna-Lions transport theory), which thus led to the condition $\gamma \geq \frac{9}{5}$, the authors of [2.9] proposed to control the amplitude of oscillations for the cut-off density through the following result

$$\forall k \geq 1, \ \limsup_{\delta \to 0} \|T_k(\varrho_\delta) - T_k(\varrho)\|_{L^{\gamma+1}((0,T)\times\Omega)} \leq c,$$

insuring some L^2 integrability since γ is supposed to be greater than 1. This property once more together with the notion of renormalized solutions

$$\partial_t L_k(\varrho_\delta) + \mathrm{div}(L_k(\varrho_\delta)\vec{u}_\delta) + T_k(\varrho_\delta)\mathrm{div}\vec{u}_\delta = 0,$$

satisfied by the family of functions

$$L_k(z) = \begin{cases} z\log(z) & \text{if } 0 \leq z < k \\ z\log(k) + z\int_k^z \frac{T_k(s)}{s^2} & \text{if } z \geq k \end{cases}$$

leads to the expected conclusion for what we refer to [2.9].

References

[2.1] G. Bateman, MHD instabilities. *MIT,* (1980).

[2.2] M.E. Bogovskii, Solution of some vector analysis problems connected with operators div and grad (in Russian). *Trudy Sem. S. L. Sobolev,* **80**(1):5–40, (1980).

[2.3] , W. Borchers, H. Sohr, On the equation curl$v = g$ and div$u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math. J.* **19**:67–87, (1990).

[2.4] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no.1, 57–90, (2007).

[2.5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, (1983).

[2.6] F.F. Chen *Introduction to Plasma Physics and Controlled fusion.* Plenum Press, New-York, (1984).

[2.7] R.J. Di Perna, P.–L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory ans Sobolev spaces. *Invent. Math.,* **98**:511–547, (1989).

[2.8] B. Ducomet, E. Feireisl, The equations of magnetohydrodynamics: on the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars. *Comm. Math. Phys.* **266**, no 3, 595–629, (2006).

[2.9] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids. *J. Math. Fluid Mech.* **3**, no.4, 358–392, (2001).

[2.10] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids.* Oxford Univ. Press, (2004).

[2.11] J.–F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford University Press, (2006).

[2.12] F. Lachin, B. Saramito, Bifurcation de solutions stationnaires pour un problème de magnétohydrodynamique (mhd), en état adiabatique. *J. Math. Pures Appl.* **78**, p. 565–589, (1999).

[2.13] J.–L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Gautthier-Villars, Paris, (1969).

[2.14] J.–L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Vol 1.

[2.15] P.–L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol 1. Incompressible models.* Oxford Science Publication, Oxford, (1996).

[2.16] P.–L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol 2. Compressible models.* Oxford Science Publication, Oxford, (1998).

[2.17] A. LUNARDI, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems,* Birkhäuser, Berlin, (1995).

[2.18] B. SARAMITO, *Stabilité d'un plasma : modélisation mathématique et simulation numérique.* Masson, (1994).

[2.19] J. SIMON, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata,* (IV), Vol. CXLVI, pp.65–96, (1987).

Partie II

Modèles à viscosité variable

Chapitre III

Fluides compressibles visqueux et conduction de chaleur

Dans cette deuxième partie, on considère que les coefficients de viscosité dépendent des caractéristiques du fluide, en particulier sa densité.
On a déjà signalé que des termes de viscosité non constants posent certaines difficultés et précisément pour obtenir les estimations suffisantes pour la stabilité des solutions. L'étude de ce genre de modèles a été éclaircie par les travaux de D. Bresch et B. Desjardins en proposant une nouvelle manière d'obtenir des estimations. Les méthodes usuelles d'énergie ont ainsi été renforcées par cette nouvelle idée que l'on va préciser maintenant.

3.1. Introduction

La vision compressible en mécanique des fluides pose un question délicate, celle de savoir comment traiter le cas du vide. Plus précisément, pour l'étude d'un modèle de fluides compressibles et pour ne parler que de l'aspect visqueux par exemple, on est amené à conditionner les profils de viscosité.
Les premiers résultats d'existence pour le modèle de Navier-Stokes compressible furent obtenus pour des conditions initiales loin du vide, c'est-à-dire bornées inférieurement par des constantes, ou encore proches d'un état d'équilibre. Chronologiquement, on peut citer les travaux de A.V. Kazhikov et V.V. Shelukhin [3.16] pour l'existence de solutions globales en temps en dimension 1 avec données initiales régulières, puis pour des données initiales discontinues par D. Serre [3.23] et D. Hoff [3.12]. Ces idées ont ensuite été généralisées en dimensions supérieures, notamment par A. Matsumura et T. Nishida [3.19] pour des données initiales régulières et D. Hoff [3.13], [3.14] dans le cas discontinu. Plus tard, et pour des données initiales générales, on a déjà évoqué les grandes contributions de P.–L.Lions [3.18] puis les généralisations de E. Feireisl, A. Novotny et H. Petzeltova [3.10]. S. Jiang et P. Zhang [3.15] ont même amoindri la condition adiabatique au maximum moyennant une hypothèse de symétrie sur les données initiales. Toujours est-il que ces résultats, d'une manière ou d'une autre, imposent à la viscosité d'être bornée inférieurement.

Nous allons justement parler dans ce chapitre et les suivants de problèmes où la viscosité peut s'annuler, il s'agit de considérer des coefficients de viscosité dégénérés en densité. Le premier élément de réponse vient de D. Bresch, B. Desjardins et C.K. Lin [3.8] pour le système de Korteweg puis de D. Bresch et B. Desjardins [3.3] pour le cas plus général d'existence de solutions faibles globales en temps pour les équations de Navier-Stokes avec conduction thermique, que nous allons décrire maintenant. On propose justement dans la suite une généralisation magnétique de ce résultat.

3.2. Le modèle avec température

Le problème d'existence globale de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes avec conduction de chaleur a donc été étudié par D. Bresch et B. Desjardins pour une certaine classe de coefficients de viscosité et de conductivité thermique dans le cas périodique en dimension $d = 2$ ou 3. Rappelons ici le système considéré dans [3.3], sur l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou dans $\Omega = T^d$ avec des conditions de bord périodiques :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0, \tag{3.1}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{div}\Sigma = f_{ext}, \tag{3.2}$$

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta)+\mathrm{div}(\varrho u\theta)\Big)+r\varrho\theta\mathrm{div}u-\mathrm{div}\big(\kappa(\varrho,\theta)\nabla\theta\big) = 2\mu(\varrho)D(u) : D(u)+\lambda(\varrho)|\mathrm{div}u|^2, \tag{3.3}$$

où le tenseur Σ est maintenant défini par

$$\Sigma = 2\mu(\varrho)D(u) + \big(\lambda(\varrho)\mathrm{div}u - p\big)\mathbf{I}$$

et $D(u)$ est la partie symétrique du gradient ∇u. Précisons également que le coefficient κ représente la conductivité thermique et que l'on suppose ici qu'elle dépend de la densité et de la température du fluide que l'on a noté θ.

3.3. Température et énergie interne

3.3.1. Définitions et notations

On introduit ici quelques termes de thermodynamique. En ce qui concerne la température, on va présenter différentes formes d'équations qui portent ou bien sur la température ou bien sur d'autres énergies du fluide. On débute par l'énergie spécifique interne e et l'énergie spécifique totale E :

$$e = C_v\theta + e_c(\varrho), \quad E = e + |u|^2/2.$$

Les enthalpies spécifiques relatives à e et E sont notées respectivement h et H, elles sont données par :

$$h = e + P/\varrho, \quad H = h + |u|^2/2.$$

3.3.2. Equations de température

Voici donc différentes formes que peut prendre la loi de conservation en température initialement écrite en (3.3). La première version s'obtient naturellement en ajoutant à (3.3) l'équation de mouvement testée contre la vitesse u :

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}(\varrho u H) = \mathrm{div}(\Sigma \cdot u) + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta). \tag{3.4}$$

La seconde version concerne l'entropie $s = C_v \log(\theta/\varrho^\Gamma)$:

$$\theta\big(\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}(\varrho s u)\big) = 2\mu D(u) : D(u) + \lambda |\mathrm{div} u|^2 + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta). \tag{3.5}$$

3.4. Contrôle des densités

3.4.1. Profils de viscosité

Les coefficients de viscosité λ et μ sont supposés appartenir respectivement à $C^0(\mathbb{R}^+)$ et $C^1(\mathbb{R}^+)$, on suppose également que $\mu(0) = 0$. La première condition à la mise en place de cette stratégie de Bresch et Desjardins relie les coefficients μ et λ de la manière suivante :

$$\forall s > 0,\ \lambda(s) = 2(s\mu'(s) - \mu(s)). \tag{3.6}$$

En effet, il s'agit là d'une condition nécessaire à l'écriture de l'équation (3.9) que l'on verra plus loin, c'est donc finalement la première restriction concernant la stratégie Bresch–Desjardins.

D'autre part, afin d'obtenir les bonnes estimations et les compacités nécessaires, les viscosités μ et λ doivent correspondre à certains profils définis séparément pour les densités proche et loin du vide :

$$\forall s < A,\ \mu(s) \geq c_0 s^n,\ 3\lambda(s) + 2\mu(s) \geq c_0 s^n, \tag{3.7}$$

$$\forall s \geq A,\ c_1 s^m \leq \mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m,\ c_1 s^m \leq 3\lambda(s) + 2\mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m, \tag{3.8}$$

où $m > 1$ et $\frac{2}{3} < n < 1$ sont également soumises à certaines hypothèses que l'on peut retrouver par exemple dans [3.3] pour le cas des équations de Navier-Stokes compressibles avec température.

3.4.2. L'entropie BD

Une nouvelle grandeur semble naturelle dans les équations de Navier-Stokes, que l'on peut d'ailleurs trouver dans certains écrits d'Einstein, il s'agit de $u + \nabla\mu(\varrho)/\varrho$. Cette vitesse "modifiée", considérée comme une entropie mathématique, est spécialement liée à la structure même des équations de Navier-Stokes compressible. Le point crucial qui permet ainsi de produire de nouvelles estimations consiste à remplacer l'équation de conservation de la

quantité de mouvement par une équation sur $u + \nabla\mu(\varrho)/\varrho$. On développe rapidement ici cette démarche car elle constitue une étape essentielle.
On commence par multiplier l'équation de conservation de la masse (3.1) par $\varphi'(\varrho) = \frac{\mu'(\varrho)}{\varrho}$, on obtient :

$$\partial_t\varphi(\varrho) + (u\cdot\nabla)\varphi(\varrho) + \mu'(\varrho)\mathrm{div}u = 0$$

On dérive ensuite cette égalité par rapport à la variable d'espace :

$$\partial_t\nabla\varphi(\varrho) + (u\cdot\nabla)\nabla\varphi(\varrho) + \nabla u : \nabla\varphi(\varrho) + \nabla(\mu'(\varrho)\mathrm{div}u) = 0$$

On multiplie maintenant par 2ϱ et, en notant $v = 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}$, on a :

$$\partial_t(\varrho v) + \mathrm{div}(\varrho u\otimes v) + 2\nabla u : \nabla\mu(\varrho) + 2\varrho\nabla\big(\mu'(\varrho)\mathrm{div}u\big) = 0$$

Pour finir, et c'est à ce point précis qu'il a été nécessaire de lier les viscosités λ et μ par (3.6), on ajoute cette dernière ligne à la loi de conservation (3.2), on aboutit ainsi à l'équation sur $u+v$ suivante :

$$\partial_t\big(\varrho(u+v)\big) + \mathrm{div}\big(\varrho u\otimes(u+v)\big) - 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho)A(u)\big) + \nabla p = 0, \tag{3.9}$$

où $A(u) = \frac{1}{2}(\nabla u -^t \nabla u)$ est la partie antisymétrique du gradient.
Il apparaît alors naturel de tester cette équation contre $u+v$ pour obtenir une nouvelle équation d'énergie, ce qui donnera, en intégrant sur $[0,t]\times\Omega$, la borne supplémentaire

$$\int_\Omega \varrho\Big|u + \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\Big|^2(t,x)\,dx \le C,\ \forall t>0.$$

3.4.3. La pression froide

Nous venons de voir, dans la section précédente, une façon de gagner des informations supplémentaires en particulier sur la densité et plus précisément pour des puissances positives de la densité. Néanmoins, pour la stabilité des solutions, il faut également contrôler les densités proches du vide. Pour cela, on introduit un terme de pression froide lié à l'énergie interne e_c, on considère ainsi le terme total de pression suivant :

$$p(\varrho,\theta) = r\varrho\theta + p_c(\varrho) \tag{3.10}$$

avec

$$p_c(\varrho) = \varrho^2 e_c'(\varrho),$$

$$\forall\varrho\in(0,\varrho_*),\quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*} \le p_c'(\varrho) \le C_*\varrho^{-l-1},\quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*'} \le e_c(\varrho) \le C_*'\varrho^{-l-1},$$

$$\forall\varrho>\varrho_*,\quad -\frac{1}{\tau_*}\mu'(\varrho) \le p_c'(\varrho) \le C_{**}\varrho^{k-1},\quad 0\le e_c(\varrho)\le C_{**}'\varrho^{k-1}.$$

où $\varrho_*, \tau_* > 0$, $C_*, C'_*, C_{**}, C'_{**} > 0$ et $k, l > 1$ satisfont aux conditions

$$l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1, \qquad k \leq \Big(m - \frac{1}{2}\Big)\frac{5(l+1)-6n}{l+1-n}$$

3.5. Remarques

P.–L. Lions et E. Feireisl avaient proposé quelques études sur la conduction de chaleur mais leurs résultats d'existence n'aboutissaient pas aux équations de température citées précédemment.
D'une part, P.–L. Lions concluait à l'existence de solutions faibles pour l'équation de température

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho u\theta)\Big) - p(\varrho,\theta)\mathrm{div}u - \mathrm{div}\big(\kappa(\theta)\nabla\theta\big) = 2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\mathrm{div}u|^2 + \tilde{m},$$

où $\tilde{m}$ désigne une mesure positive bornée sur $\Omega \times (0,T)$ et pour des lois de pression de la forme

$$p(\varrho,\theta) = q(\varrho)\theta,$$

avec comme conditions sur la fonction q, celles d'être continue, croissante, nulle en 0 et telle que :

$$\exists a > 1 \ ; \lim_{t\to+\infty} q(t)t^{-a} = l > 0.$$

De son côté, E. Feireisl présente son résultat d'une autre manière en introduisant une inégalité :

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho u\theta)\Big) - \theta p_\theta(\varrho)\mathrm{div}u - \mathrm{div}\big(\kappa(\theta)\nabla\theta\big) \geq 2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\mathrm{div}u|^2.$$

Notons d'ailleurs que l'idée d'un terme de pression en deux parties, l'une dépendant uniquement de la densité et l'autre dépendant également de la température, n'est pas nouvelle puisqu'ici, dans ce dernier exemple de E. Feireisl, le terme de pression s'écrit

$$p(\varrho,\theta) = p_e(\varrho) + \theta p_\theta(\varrho)$$

où p_e et p_θ sont des fonctions régulières, nulles en 0 vérifiant

$$p'_e(s) \geq a_1 s^{\gamma-1} - b, \ \forall s > 0,$$

$$p_e(s) \leq a_2 s^\gamma + b, \ \forall s \geq 0,$$

$$p_\theta(s) \leq c(1 + s^\Gamma), \ \forall s \geq 0,$$

avec $\gamma > 1$, $a_1 > 0$, $\Gamma < \frac{\gamma}{2}$ si $N = 2$ et $\Gamma = \frac{\gamma}{N}$ si $N \geq 3$.
Ces profils ne couvrent malheureusement pas le cas des gaz parfaits tout comme (3.10).

Pour discuter plus en détails de ces modèles avec température, nous allons faire quelques commentaires sur la partie technique de la preuve de stabilité, en particulier en ce qui concerne la compacité en température. En effet, il faut pouvoir montrer une convergence forte sur la température, or, l'équation de θ ne nous y conduit pas directement. Il est assez naturel de conclure à une convergence forte pour ϱE grâce à la forme conservative (3.4), de laquelle on déduit de la compacité pour $\sqrt{\varrho}\theta$. Pour conclure finalement à une convergence forte de la température, il est donc fortement nécessaire d'en avoir également pour $\varrho^{-1/2}$, information qui provient ici du terme de pression froide. Tout cela pour souligner le fait que la pression froide est étroitement liée au cas de conduction thermique.

Pour poursuivre les remarques sur les modèles à viscosité variable, signalons une alternative, proposée par A. Mellet et A. Vasseur dans [3.20], et qui nous éloigne du sujet de conduction thermique, qui consiste à exploiter l'entropie BD pour étudier la stabilité du cas barotrope. L'absence de température dans ce modèle supprime la nécessité de la pression froide. On perd en effet le contrôle des densités proches du vide, mais ça n'est plus nécessaire, rappelons que son utilité principale était de rendre possible la compacité en température dont il n'est plus question dans ce cas précis. Cependant, leur résultat n'est valable que pour des conditions légèrement différentes de (3.7) et (3.8) :

$$\mu'(\varrho) \geq c, \quad |\lambda'(\varrho)| \leq \frac{1}{c}\mu'(\varrho)$$

$$c\mu(\varrho) \leq 2\mu(\varrho) + 3\lambda(\varrho) \leq \frac{1}{c}\mu(\varrho)$$

$$\liminf_{\varrho \to +\infty} \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^{\gamma/3+\varepsilon}} > 0,$$

pour un $\varepsilon > 0$ quand $\gamma \geq 3$.
La difficulté majeure de ces problèmes avec des coefficients de viscosité dégénérés en densité se résume au fait que l'on ne peut pas définir la vitesse là où la densité s'annule. Les premiers résultats sur le sujet sont ceux de Bresch, Desjardins et Lin lorsqu'ils ont montré la stability L^1 des solutions faibles pour le système de Korteweg

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$

$$\partial_t(\varrho u) + \operatorname{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla p - \nu \operatorname{div}\big(\varrho D(u)\big) - \kappa\varrho\nabla\Delta\varrho = 0.$$

D. Bresch et B. Desjardins poursuivèrent ensuite en incluant le cas d'une capillarité nulle ($\kappa = 0$) moyennant l'introduction d'un nouveau terme de friction de la forme $r\varrho|u|u$. Ces études tirent évidemment profit de l'entropie mathématique BD dont nous parlons abondamment dans ce mémoire. Malheureusement, une adaptation directe n'est pas possible pour le cas barotrope général avec $\kappa = r = 0$ sans effets de capillarité ni de friction. Les travaux de A. Mellet et A. Vasseur proposent donc une manière d'obtenir la stabilité L^1 des solutions faibles, sous certaines hypothèses sur la viscosité, rappelées juste au-dessus, des conditions différentes de celles de D. Bresch et B. Desjardins mais excluant elles aussi le cas de viscosités constantes. La principale difficulté est d'avoir de la compacité sur $\sqrt{\varrho}u$. Dans la version Bresch–Desjardins avec température, la solution vient du contrôle des densités proches du vide tout comme pour la température. L'idée de Mellet et Vasseur pour le cas barotrope est d'obtenir l'estimation supplémentaire (avec $\alpha > 0$)

$$\sqrt{\varrho} u \in L^\infty(0, T; L^{2+2\alpha}(\Omega)), \tag{3.11}$$

qui améliore ainsi les bornes classiques dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et permet ensuite de borner ϱu^2 dans un espace plus grand que $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.
Terminons ce paragraphe en indiquant rapidement que la généralisation du résultat de A. Mellet et A. Vasseur avec l'ajout d'un champ magnétique extérieur B ne semble pas évidente. Pour la borne (3.11), l'équation de conservation de la quantité de mouvement est testée contre $\big(1 + \ln(1 + |u|^2)\big)u$, ce qui induit un terme relatif au terme de force de Lorentz que l'on n'a pas réussi à contrôler. Alors que la question de la stabilité pour le modèle barotrope en présence de champ magnétique a fait l'objet de la première partie pour les viscosités constantes, le cas analogue avec viscosités dégénérées restera donc ici sans réponse.

3.6. Difficultés du cas magnétique

Revenons un instant sur les travaux de J.–F. Gerbeau, C. Le Bris et T. Lelièvre [3.11] en MHD. Leur étude mathématique se partage en deux parties, faisant bien la distinction entre le cas homogène à un fluide et l'aspect multifluide correspondant finalement à une hypothèse d'hétérogénéité de la densité ϱ. Ils insistent ainsi, pour le cas multifluide, sur l'importance de l'équation de la conservation de la masse. En effet, contrairement au cas incompressible et homogène, pour lequel la densité est connue, il est nécessaire, dans le cas non homogène, de trouver une forme de compacité pour ϱ et c'est là toute l'importance de l'équation de la masse.
Le théorème 2.4 p.41 de [3.17] est un résultat extrêmement précieux de compacité pour le cas incompressible avec viscosité constante. Malheureusement, ce résultat est étroitement lié à ces hypothèses et ne peut être maintenu si la viscosité dépend de la densité ϱ, en effet, on perd l'information $u \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$, qui devient $\sqrt{\mu(\varrho)}\nabla u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$.
De même, dans le cas magnétique, le choix d'un coefficient de résistivité $\eta = \eta(\varrho)$ diminue la régularité du champ magnétique B. Ces pertes d'information doivent être compensées et c'est pourquoi on doit essayer d'en gagner ailleurs, par exemple sur ϱ et, là aussi, l'équation de la masse joue un rôle très important. Cette idée n'a pas échappé à D. Bresch et B. Desjardins, leurs travaux sur Navier-Stokes ou le modèle de Korteweg répondent à des problèmes d'existence dans le cas de viscosités non constantes en proposant une nouvelle source d'estimation sur la densité.
Rappelons que, dans cette partie, les coefficients de viscosité (et de résistivité quand on est en présence d'un champ magnétique) sont effectivement autorisés à dépendre de ϱ, c'est pourquoi on proposera plus loin de s'intéresser à l'existence de solutions faibles pour les systèmes MHD compressibles à viscosités variables en exploitant la stratégie Bresch–Desjardins. Voyons ce qu'il en est, car évidemment la présence du champ magnétique pose quelques problèmes supplémentaires. Précisons que le système dont on parle ici est composé ainsi :

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0, \tag{3.12}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{div}\Sigma = f_{ext}, \tag{3.13}$$

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho u\theta)\Big) + r\varrho\theta\mathrm{div}u - \mathrm{div}\big(\kappa(\varrho,\theta)\nabla\theta\big) = 2\mu(\varrho)D(u) : D(u)$$

$$+\lambda(\varrho)|\mathrm{div}u|^2 + f_{ext}\cdot u, \tag{3.14}$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}(\eta\mathrm{rot}B) = 0, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{div}B = 0, \tag{3.16}$$

où l'on considérera la force de Lorentz dûe à la présence d'un champ magnétique extérieur B donnée par $f_{ext} = \mathrm{rot}B \wedge B$.
Dans le cas de viscosités constantes, comme on l'a vu dans le chapitre III, l'équation d'énergie s'obtenait plutôt facilement en combinant l'équation du champ magnétique et celle de la conservation de la quantité de mouvement.
Pour le cas de viscosités variables, le problème est tout autre. Il faut désormais obtenir ce que l'on a appelé la formule BD et pour laquelle il faut contrôler les nouveaux termes issus du champ magnétique. Pour avoir une chance d'y parvenir, on suppose que le coefficient de résistivité du fluide η dépend lui aussi de la densité ϱ et le problème consiste à trouver les profils de résistivité convenables pour adapter l'étude de Bresch et Desjardins au cas magnétique. La deuxième difficulté, qui en découle, est la perte d'information pour le champ B, en effet, l'équation d'énergie "classique" ne donne plus $B \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ mais $\sqrt{\eta(\varrho)}\mathrm{rot}B \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, ce qui induira également des conditions sur η pour montrer la stabilité. La question d'une résistivité dégénérée ou non se posera donc plus loin.

3.6.1. Température

Comme nous l'avons vu juste avant, on dispose de plusieurs lois pour la température. Pour le cas magnétique, on procède pour B comme pour u, on obtient ainsi les formes relatives à l'énergie spécifique E et à l'entropie s :

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}(\varrho u H) = \mathrm{div}(\delta\cdot u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + 2\eta|\mathrm{rot}B^*|^2 + \mathrm{div}(\varrho B^*\otimes B^*)\cdot u,$$

$$\theta\big(\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}(\varrho s u)\big) = 2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\mathrm{div}u|^2 + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + 2\eta|\mathrm{rot}B^*|^2.$$

D'autre part, pour pousser le parallèle entre u et B au maximum, on peut également transformer l'énergie par la prise en compte du champ magnétique, on définit ainsi une nouvelle énergie spécifique $\tilde{E}$ ainsi que son enthalpie associée $\tilde{H}$ et on écrit une troisième version pour l'équation de conduction de chaleur :

$$\partial_t(\varrho\tilde{E}) + \mathrm{div}(\varrho u\tilde{H}) =$$

$$\mathrm{div}(\delta\cdot u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + 2\mathrm{div}(\eta\mathrm{rot}B^*\wedge B^*) + \mathrm{div}\big(\varrho(u\wedge B^*)\wedge B^*\big).$$

3.6.2. Energie et formule BD

La première idée, la plus naturelle pour l'étude du cas magnétique, fut d'essayer de montrer l'existence de solutions faibles, comme dans le premier chapitre, pour le modèle MHD "classique", c'est-à-dire le système (3.12)–(3.16) où, bien sûr, μ, λ et η dépendent de ϱ. Une première équation d'énergie s'obtient classiquement en ajoutant (3.13) multipliée par la vitesse u et (3.15) multipliée par le champ magnétique B puis en intégrant sur Ω. On obtient ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho|u|^2 + \varrho|B^*|^2 + 2\varrho e_c(\varrho)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho)S(u) : S(u)$$
$$+ \int_\Omega \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\mu(\varrho)\big)|\mathrm{div} u|^2 + 2\int_\Omega \eta(\varrho)|\mathrm{rot} B^*|^2 = \int_\Omega r\varrho\theta \mathrm{div} u.$$

Remarquons qu'une simple intégration par partie du terme résistif de l'équation de B convient. Mais le problème de la formule BD se résume ainsi : que faire du terme intégral

$$\int_\Omega \mathrm{rot} B \wedge B \cdot \Big(u + \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\Big) \ ?$$

Une rare marge de manoeuvre se cache dans le terme résistif. En reliant le coefficient de résistivité η aux coefficients de viscosité on peut avoir espoir que certains termes se compensent, dans le cas contraire on peut également essayer de contrôler ce terme grâce aux estimations dont on dispose.

3.6.3. Les issues possibles

Dans ce document, on propose deux systèmes avec viscosités et résistivités variables pour lesquels on peut montrer la stabilité de solutions faibles grâce à cette étude. En fait, pour le cas général MHD en dimension 3 tel qu'il est proposé par le système (3.12)–(3.16), il semble impossible de conditionner les coefficients (resistivité et viscosité) de manière à obtenir simultanément l'équation d'énergie et une extension de la formule BD à la MHD. Néanmoins, nous verrons que pour un modèle MHD avec terme de tension de surface, il est possible d'obtenir un contrôle sur les gradients de la densité par un lemme de Gronwall. On reviendra sur ce sujet dans la troisième partie. Dans le chapitre suivant, nous étudierons une version visqueuse des modèles de type Born-Infeld. Nous montrerons que ce modèle est compatible avec une extension de la formule BD.

Dans cette théorie, on trouve des modèles dont les propriétés sont similaires à celles du système (3.12)–(3.16) mais dont les équations changent quelque peu, plus précisément en ce qui concerne le terme magnétique dans l'équation de la vitesse.

Curieusement, on peut donc développer, dans cette lignée, un modèle MHD avec viscosités variables et conduction de chaleur pour lequel la preuve de Bresch et Desjardins est parfaitement adaptable, et c'est ce que nous allons voir maintenant dans le chapitre suivant.

Il serait intéressant de comprendre le lien éventuel entre les modèles MHD classiques cités par exemple dans [3.22] et les modèles de Born-Infeld récemment remis au goût du jour par Y. Brenier, voir [3.1].

3.7. Le modèle de Born-Infeld

Le modèle de Born-Infeld est une forme non linéaire des équations de Maxwell et sa version "élargie", que l'on définira plus loin, présente des similarités avec les équations de la Magnéto-Hydro-Dynamique. Plus précisément, pour des champs "petits" on retrouve les équations de Maxwell alors que la limite pour des champs "grands" conduit à un modèle MHD sans pression.

3.7.1. Lagrangien et densité d'énergie

Pour des champs E et B vérifiant les équations

$$\partial_t B + \mathrm{rot} E = 0, \quad \mathrm{div} B = 0, \tag{3.17}$$

on définit une fonction $L(E, B)$, appelée Lagrangien ou encore densité lagrangienne, à partir de laquelle on va définir de nouvelles variables.
Considérons donc deux nouvelles inconnues D et H satisfaisant

$$\partial_t D = \mathrm{rot} H, \quad \mathrm{div} D = 0, \quad D = \partial_E L(E, B), \quad H = -\partial_B L(E, B) \tag{3.18}$$

Le système (3.17)–(3.18) remplace ainsi les équations linéaires de Maxwell. Ces équations peuvent être écrites en fonction des seules variables B et D en introduisant la densité d'énergie ou densité Hamiltonienne :

$$h(D, B) = \sup_E \big(E \cdot D - L(E, B) \big)$$

et en posant

$$E = \partial_D h(D, B), \quad H = \partial_B h(D, B)$$

Les équations de Maxwell correspondent aux expressions particulières du Lagrangien et de la densité d'énergie suivantes :

$$L(E, B) = \frac{E^2 - B^2}{2}, \quad h(D, B) = \frac{B^2 + D^2}{2}$$

En effet, ces choix conduisent aux égalités $D = E$ et $H = B$ et le système (3.17)–(3.18) s'écrit alors

$$\partial_t B + \mathrm{rot} E = 0, \quad \mathrm{div} B = 0$$

$$\partial_t E - \mathrm{rot} B = 0, \quad \mathrm{div} E = 0$$

3.7.2. Système (BI)

Pour le modèle de Born-Infeld, le Lagrangien et la densité d'énergie s'expriment ainsi :

$$L_\lambda(E,B) = -\sqrt{\lambda^2 + B^2 - E^2 - \frac{(E\cdot B)^2}{\lambda^2}}, \quad h = \sqrt{\lambda^2 + B^2 + \lambda^2 D^2 + |D\wedge B|^2} \qquad (3.19)$$

On obtient alors, pour E et H, les expressions suivantes (avec $P = D\wedge B$) :

$$E = \partial_D h(D,B) = \frac{\lambda^2 D + B\wedge P}{h}, \quad H = \partial_B h(D,B) = \frac{B - D\wedge P}{h}$$

et, par suite, **le système de Born-Infeld** :

$$\partial_t D + \mathrm{rot}\Big(\frac{-B + D\wedge P}{h}\Big) = \partial_t B + \mathrm{rot}\Big(\frac{\lambda^2 D + B\wedge P}{h}\Big) = 0 \qquad (3.20)$$

$$\mathrm{div} D = \mathrm{div} B = 0 \qquad (3.21)$$

La densité d'énergie satisfait par ailleurs à la loi de conservation :

$$\partial_t h + \mathrm{div} P = 0$$

D'autre part, la fonction h, définie par (3.19) comme fonction de D et B, est strictement convexe au voisinage de l'origine mais pas globalement, par contre elle l'est pour les variables D, B et P, c'est pourquoi il apparait naturel de considérer également une équation d'évolution pour le vecteur de Poynting P.

Théorème 3.1. *La solution (D,B) des équations de Born-Infeld (3.20)–(3.21) vérifie la loi de conservation*

$$\partial_t P + \mathrm{div}\Big(\frac{P\otimes P - B\otimes B - \lambda^2 D\otimes D}{h}\Big) = \nabla\Big(\frac{\lambda^2}{h}\Big)$$

On peut trouver la preuve de cette proposition dans les travaux de Y. Brenier. Ainsi, on a complété le système de Born-Infeld (3.12)–(3.13) pour obtenir ce que l'on nommera le système de Born-Infeld élargi et qui présente des similarités avec l'hydrodynamique. En effet, il suffit de réinterpréter les variables du problème, supposons que h représente la densité d'un fluide et définissons la vitesse v de ce même fluide en posant

$$v = \frac{P}{h}$$

On obtient alors **le système de Born-Infeld élargi** dont la ressemblance avec les équations de Navier Stokes est alors flagrante :

$$\partial_t h + \mathrm{div}(hv) = 0 \qquad (3.22)$$

$$\partial_t(hv) + \mathrm{div}\Big(hv\otimes v - \frac{B\otimes B + \lambda^2 D\otimes D}{h}\Big) = \nabla\Big(\frac{\lambda^2}{h}\Big) \qquad (3.23)$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(v\wedge B) + \lambda^2 \mathrm{rot}\Big(\frac{D}{h}\Big) = 0, \quad \mathrm{div} B = 0 \qquad (3.24)$$

$$\partial_t D - \mathrm{rot}(v\wedge D) - \mathrm{rot}\Big(\frac{B}{h}\Big) = 0, \quad \mathrm{div} D = 0 \qquad (3.25)$$

D'autre part, pour terminer le parallèle avec la mécanique des fluides ainsi qu'avec la théorie électromagnétique, précisons que B et D jouent respectivement les rôles du champ magnétique et de l'induction électrique.

3.8. Un modèle avec viscosité

3.8.1. Limite $\lambda \to 0$: modèle MHD sans pression

On a déjà vaguement signalé que les équations de la MagnétoHydroDynamique découlaient du modèle de Born-Infeld pour des champs "grands", on va donc préciser maintenant de quoi il s'agit précisément. Les changements d'échelle

$$B \to \frac{B}{\varepsilon}, \quad h \to \frac{h}{\varepsilon}$$

pour $\varepsilon << 1$, conduisent au nouveau modèle, qui correspond à la limite formelle quand $\lambda \to 0$ dans le système de Born-Infeld élargi

$$\partial_t h + \mathrm{div}(hv) = 0 \tag{3.26}$$

$$\partial_t(hv) + \mathrm{div}\Big(hv \otimes v - \frac{B \otimes B}{h}\Big) = 0 \tag{3.27}$$

$$\partial_t B - \mathrm{rot}(v \wedge B) = 0 \tag{3.28}$$

$$\mathrm{div} B = 0 \tag{3.29}$$

Revenons un instant à la MHD "classique" et regardons quelles sont les différences avec le modèle ci-dessus. On peut d'abord remarquer que dans l'équation (3.27), correspondant à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il n'y a pas de terme de pression et également que le terme magnétique $\mathrm{rot} B \wedge B$ relatif à la force de Lorentz est ici remplacé par le terme conservatif $\mathrm{div}\Big(\frac{B \wedge B}{h}\Big)$. D'autre part, ce système ne contient pas de termes de diffusion.

3.8.2. Modèle VABI

Le système précédent est souvent baptisé "MHD sans pression" de par sa ressemblance avec les équations de la MHD. Il a semblé intéressant de compléter ce système d'équations pour modéliser des fluides visqueux similaires à ce que l'on a vu dans les chapitres précédents. Ainsi, réintroduisant dans ce modèle des termes de pression et de diffusion, on peut étudier ici aussi l'existence de solutions comme on l'a fait précédemment. Le système que l'on considère dans le cas de conduction thermique est le suivant (où l'on note $B^* = B/\varrho$) :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0, \tag{3.30}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u - \varrho B^* \otimes B^*) + \nabla P - 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho) D(u)\big) - \nabla(\lambda(\varrho)\mathrm{div} u) = 0, \tag{3.31}$$

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho u \theta)\Big) + r\varrho\theta \mathrm{div} u - \mathrm{div}\big(\kappa(\varrho,\theta)\nabla\theta\big) = 2\mu(\varrho) D(u) : D(u) + \lambda(\varrho)|\mathrm{div} u|^2, \tag{3.32}$$

$$\partial_t(\varrho B^*) - \mathrm{rot}(\varrho u \wedge B^*) + 2\mathrm{rot}(\eta(\varrho)\mathrm{rot} B^*) = 0, \tag{3.33}$$

$$\mathrm{div} B = 0, \tag{3.34}$$

3.8.3. Energie et formule BD

Comme on l'a déjà souligné plusieurs fois, l'outil clé pour l'étude de ce genre de modèles est l'obtention de l'équation d'énergie et de la formule BD. Nous allons donc préciser ici comment on y parvient et sous quelles hypothèses sur la résistivité. La variable magnétique qui, comme on l'a mis en évidence dans les équations précédentes, semble privilégiée est la quantité $B^* = B/\varrho$.
La première remarque intéressante à ce sujet se résume ainsi : en multipliant (3.33) par B^* et par simples intégrations par parties, on écrit

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho |B^*|^2 + \int_\Omega \eta(\varrho)|\mathrm{rot} B^*|^2,$$

ce qui conduit directement à l'équation d'énergie classique lorsqu'on teste (3.31) contre la vitesse u. Dans un deuxième temps, il faut également tirer profit de la stratégie Bresch–Desjardins, et pour y parvenir on doit préserver aussi la formule BD dans le cas magnétique. L'idée principale consiste à réécrire le terme intégral lié à la résistivité et on a :

$$\int_\Omega \eta(\varrho)|\mathrm{rot} B^*|^2 =$$

$$\int_\Omega \eta(\varrho)\tilde{S}(B^*) : \tilde{S}(B^*) + \int_\Omega \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\eta(\varrho)\big)|\mathrm{div} B^*|^2 + \int_\Omega \mathrm{div}(\varrho B^* \otimes B^*) \cdot \frac{\nabla \eta(\varrho)}{\varrho}.$$

On peut ainsi contrôler les termes obtenus lorsque l'on teste le terme magnétique de (3.31) contre u puis $u + \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}$ pour des profils de résistivité tels que $\nabla\eta(\varrho) = \nabla\mu(\varrho)$, c'est-à-dire pour des résistivités η égales à la viscosité μ à une constante près.

3.8.4. Stabilité de solutions faibles *($\rightarrow$ chapitre IV)*

On considère, dans le chapitre suivant, une suite de solutions $(\varrho_n, u_n, B_n, \theta_n)$ du système (3.30)–(3.34) relatif aux conditions initiales

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho u|_{t=0} = m_0, \quad B|_{t=0} = B_0, \quad \varrho\tilde{E}|_{t=0} = G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|B_0|^2}{2\varrho_0},$$

satisfaisant

$$\varrho_0 \geq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \ \frac{|m_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ p.p. sur } \{\varrho_0 = 0\}.$$

$$G_0(x) \in \overline{\varrho_0(x) e(\varrho_0(x), \mathbb{R}_+)}, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

$$\theta_0(x) = e(\varrho_0(x), \cdot)^{-1}\big(\{G_0(x)/\varrho_0(x)\}\big) \geq 0 \text{ p.p. sur } \{\varrho_0 \neq 0\}.$$

$$\mathrm{div} B_0 = 0, \ \frac{|B_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ p.p. sur } \{\varrho_0 = 0\}.$$

et on se propose d'étudier la stabilité lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire montrer que la limite (ϱ, u, B, θ) est aussi solution. Comme nous l'avons déjà indiqué, on se place dans un domaine périodique en espace.

Les étapes de la preuve sont les suivantes, dans un premier temps on recherche des estimations a priori, que l'on obtient grâce aux énergies mais aussi en montrant une formule de type BD entropie qui, nous le rappelons encore ici, est d'une importance capitale.
La principale difficulté est de montrer qu'il est possible de trouver une relation algébrique entre résistivité et viscosité permettant d'obtenir une telle égalité.
Nous montrerons que sous la condition

$$\forall s > 0,\ \eta(s) = \mu(s) + c,\ c \geq 0,$$

on a les formules suivantes :

Lemme 3.2.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|u_n|^2 + \varrho_n|B_n^*|^2 + 2C_v\varrho_n\theta_n + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|u_n|^2 + \varrho_n|B_n^*|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)S(u_n) : S(u_n)$$

$$+\int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div} u_n|^2 + 2\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{rot} B_n^*|^2 = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n \mathrm{div} u_n,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\Big|u_n + 2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2 + \varrho_n|B_n^*|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(u_n) : A(u_n)$$

$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)\tilde{S}(B_n^*) : \tilde{S}(B_n^*) + \int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div} B_n^*|^2$$

$$+2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2 + 2c\int_\Omega |\mathrm{rot} B_n^*|^2 =$$

$$-2\int_\Omega \mu'(\varrho_n)p_c'(\varrho_n)\frac{|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n} + \int_\Omega r\varrho_n\theta_n \mathrm{div} u_n - 2\int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho_n,$$

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\theta_n}\Big(2\mu(\varrho_n)S(u_n) : S(u_n) + \big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div} u_n|^2\Big)$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2} + 2\int_0^t\int_\Omega \frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}|\mathrm{rot} B_n^*|^2 \leq \int_\Omega \big(\varrho_n s_n(t,\cdot) + \varrho_0(s_0)_-\big).$$

Après avoir bien entendu contrôlé les seconds membres on obtient de nombreuses estimations, les plus intéressantes étant celles qui concernent la densité. En effet, il faut insister sur le fait que dans notre cas présent, il est nécessaire de pouvoir recueillir un maximum d'informations sur ϱ_n de manière à pouvoir bien étudier les non linéarités créees par la dépendance en densité des coefficients de viscosité et de résistivité. Forts de ces estimations, notre but est alors de trouver les compacités nécessaires pour le passage à la limite. Le travail de D. BRESCH et B. DESJARDINS [3.3] propose déjà une preuve complète pour le cas non magnétique. Rappelons simplement les points clés, nous nous intéresserons ensuite rapidement aux questions de compacité pour le champ magnétique.
Le premier point important, et surtout nouveau dans l'étude de D. BRESCH et B. DESJARDINS, est l'intégrabilité de $\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ indépendamment de n, information issue de l'équation d'énergie et de la formule BD.
La présence, également, du terme de pression froide donné dans le paragraphe 3.4.3 est essentiel pour le contrôle des densités. En effet, on sait aussi que $\varrho_n^{-1/2}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^6_{loc}(\Omega)\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$.
Le contrôle des densités proches et loin du vide ainsi que l'équation de conservation de la masse conduisent alors aux compacités

$$\varrho_n \to \varrho \text{ dans } C([0,T];L^q_{loc}(\Omega)),$$

$$\varrho_n^{-1/2} \to \varrho^{-1/2} \text{ dans } L^p(0,T;L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall p<+\infty,\ \forall q<6.$$

Cette dernière permet, en particulier, de conclure à un résultat de convergence forte pour la température sans laquelle on ne pourrait conclure, on renvoie à [3.4] pour la preuve de ce point.
En ce qui concerne le champ magnétique pour finir, les termes les plus inquiétants sont ceux de l'équation de température car ils sont doublement non linéaires. Ce sont les termes $\partial_t(\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2)$, $\operatorname{div}(\varrho_n\vec{u}_n|\vec{B}_n^*|^2)$, $\operatorname{div}\big(\varrho_n(\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n^*)\wedge\vec{B}_n^*\big)$ et $\operatorname{div}(\eta(\varrho_n)\mathrm{rot}\vec{B}_n^*\wedge\vec{B}_n^*)$, une propriété de compacité est évidemment nécessaire pour B_n.
Les convergences dont on dispose sont les suivantes

$$\vec{B}_n=\varrho_n\vec{B}_n^*\to\vec{B}=\varrho\vec{B}^* \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega)),\ \forall p<+\infty,\ \forall q<3,$$

$$\sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^*\to\sqrt{\varrho}\vec{B}^* \text{ in } L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega)),$$
$$\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*\to\varrho^{1/3}\vec{B}^* \text{ in } L^3(0,T;L^3_{loc}(\Omega)).$$

On parlera aussi dans le chapitre suivant consacré à la preuve de ce résultat d'une adaptation possible et presque immédiate au système de Born-Infeld augmenté complet.

Références bibliographiques

[3.1] Y. Brenier, Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **172**, 65–91, (2004).

[3.2] Y. Brenier, W.A. Yong, Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism. *J. Math. Phys.* **46**, no. 6, (2005).

[3.3] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no.1, 57–90, (2007).

[3.4] D. Bresch, B. Desjardins, Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressibles complètes avec conduction thermique. *C. R. Acad. Sci.,* Paris, Section mathématiques. Vol.343, issue 3, 219–224, (2006).

[3.5] D. Bresch, B. Desjardins, On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Maths pures et appliquées,* **86**, 362–368, (2006).

[3.6] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Maths pures et appliquées,* (9) 87, no. 2, 227–235, (2007).

[3.7] D. Bresch, B. Desjardins, G. Métivier, Recent mathematical results and open problems about Shallow Water equations. *Analysis and Simulation of Fluid Dynamics in the series Advances in Mathematical Fluid Mechanics (eds C. Calgero, J.–F. Coulombel, T. Goudon),* (2006).

[3.8] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Comm. Partial Diff. Eqs,* **28**, No. 3-4, (2003), 1009–1037.

[3.9] E. Feireisl, *Mathematics of viscous, compressible, and heat conducting fluids.* Nonlinear partial differential equations and related analysis, 133–151, Contemp. Math., 371, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[3.10] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids. *J. Math. Fluid Mech.* **3**, no.4, 358–392, (2001).

[3.11] J.–F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford University Press, (2006).

[3.12] D. HOFF, Global existence for 1D, compressible, isentropic Navier-Stokes equations with large initial data. *Trans. Amer. Math. Soc.* 303(1):169–181, (1987).

[3.13] D. HOFF, Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data *J. Differential Equations,* 120(1):215–254, (1995).

[3.14] D. HOFF, Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data. *Arch. Rational Mech. Anal.* 132(1):1–14, (1995).

[3.15] S. JIANG, P. ZHANG, Axisymmetric solutions of the 3D Navier-Stokes equations for compressible isentropic fluids. *J. Math. Pures Appl. (9),* 82(8):949–973, (2003).

[3.16] A.V. KAZHIKOV, V.V. SHELUKHIN, Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas. *Prikl. Mat. Meh.* 41(2):282–291, (1977).

[3.17] P.–L. LIONS, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.1,* Oxford University Press, (1996).

[3.18] P.–L. LIONS, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.2,* Oxford University Press, (1998).

[3.19] A. MATSUMURA, T. NISHIDA, The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat conductive fluids. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 55(9):337–342, (1979).

[3.20] A. MELLET, A. VASSEUR, On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. partial differential equations,* 32, no. 1-3, 431–452, (2007).

[3.21] Y.J. PENG, J. RUIZ, Two limit cases of Born-Infeld equations. *Submitted,* (2007).

[3.22] B. SARAMITO, *Stabilité d'un plasma : modélisation mathématique et simulation numérique.* Masson, (1994).

[3.23] D. SERRE, Solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 303(13):639-642, (1986).

Chapter IV

The Augmented Born-Infeld model for viscous fluids

Submitted for publication: R. Sart, A viscous Augmented Born-Infeld model for magnetohydrodynamic flows, (2007).

Abstract

The goal of this paper is to show the stability of weak solutions for a system derived from the Augmented Born-Infeld equations (ABI), seen as a magnetic model for fluids and specified here for viscous and heat conducting fluids.
We will deal with the case of a three-dimensional space, in a set Ω which is supposed to be a periodic box or the whole space $\mathbb{R}^3$ and introduce viscosity, resistivity and thermal conductivity coefficients depending on the density ϱ and the temperature θ.

4.1. Introduction

The classical way to modelize a fluid motion in presence of a magnetic field is to consider the equations of MagnetoHydroDynamics (MHD). In this paper, our starting point is a little bit different, we are considering the Augmented Born-Infeld system derived from the Born-Infeld model which is originally designed as a nonlinear correction to the linear Maxwell equations. This non-linear generalization of electromagnetism has recently been put on light by Y. Brenier (to have complete details about this theory we can refer to [4.1] or [4.2]).
The Born-Infeld model appeared more than seventy years ago to give some ideas about the classical question of infinite electrical energy for point charges. Indeed, M. Born and L. Infeld modified the Maxwell equations and introduced a physical constant E_0 that bounds every electric field as well as the speed of the light is the upper limit of any velocity in the special relativity of Einstein. When $E_0 >> 1$, we recover the classical linear Maxwell equations but when E_0 is finite, the nonlinear effects appear and bring some insuperable difficulties, that is why it has often been forgotten. Nevertheless, the Born-Infeld theory

found some interests for instance in string theory, developped by J. Polchinsky in the nineties. From an other hand, the theory of optimal density transport, initially studied by Monge or Kantorovitch, has recently led to many applications, an interesting one is the application of optimal transportation theory to the reconstruction of the early Universe by A. Sobolevski and U. Frish. This theory could be generalized to the notion of current transport created by the motion of charged particules that is why it is important to study electromagnetism theory, say, Maxwell equations and also its nonlinear extension to Born-Infeld, and understand these equations as current transport equations. The Born-Infeld model has, from this point of view, some remarquable mathematical properties, and we are now interested in developping some other mathematical structure concerning the augmented version of the Born-Infeld system.

To give some ideas about the following work, we can precise that we consider here a model for compressible, viscous and heat conducting fluids derived from a pressureless MHD model, limit case of the Augmented Born-Infeld system. Moreover we consider viscosities depending on the density of the fluid and it is often difficult to deal with this kind of model with density-dependent coefficients, that is why our strategy will consist in taking advantage, for this magnetic model, of the BD-entropy structure recently proposed by D. Bresch and B. Desjardins. In some words, the BD strategy consists in getting more estimates on the density thanks to the classical energy identity together with a new one, called BD formula, what, of course, represents a major difficulty. Indeed, adding some magnetic considerations in the system changes the way to get this BD formula. This work is not a simple adaptation of [4.3], where we would be able to control the added magnetic terms in BD formula. We will see that we contrarily must deal with these terms, what is possible using the magnetic equation completed with some new considerations. More precisely, the result is tightly related to some specific choices for resistivity coefficients, also depending on the density, in order to get the BD structure. We finally precise that these choices are related to the viscosity profiles. Now, let's first say some words about the way leading to our model.

4.1.5. The Augmented Born-Infeld model

Let $\vec{B}$ and $\vec{D}$ be time dependent vector fields in $\mathbb{R}^3$. The Augmented Born-Infeld model (ABI) writes as follows:

$$\partial_t \vec{B} + \mathrm{curl}\Big(\frac{\vec{B}\wedge\vec{V}+\gamma^2\vec{D}}{h}\Big) = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0,$$

$$\partial_t \vec{D} + \mathrm{curl}\Big(\frac{\vec{D}\wedge\vec{V}-\vec{B}}{h}\Big) = 0, \quad \mathrm{div}\vec{D} = 0,$$

where the energy density h and the Poynting vector $\vec{V}$ given by

$$\vec{V} = \vec{D}\wedge\vec{B}, \quad h = \sqrt{1+|\vec{B}|^2+|\vec{D}|^2+|\vec{V}|^2},$$

also satisfy, for smooth solutions $\vec{B}$ and $\vec{D}$, the additional conservation laws

$$\partial_t h + \mathrm{div}\vec{V} = 0,$$

$$\partial_t \vec{V} + \mathrm{div}\Big(\frac{\vec{V}\otimes\vec{V}}{h} - \frac{\vec{B}\otimes\vec{B}}{h} - \gamma^2\frac{\vec{D}\otimes\vec{D}}{h}\Big) = \nabla\Big(\frac{\gamma^2}{h}\Big).$$

We immediately notice that we recover the classical Maxwell equations under the conditions $\vec{B}, \vec{D} << 1$.

4.1.6. Fluid Mechanics point of view on a limit case

Let's now talk about the limit of the Augmented Born-Infeld model obtained for large h and $\vec{B}$, corresponding to the limit case $\gamma \to 0$. When we take this limit, the vector $\vec{D}$ is not coupled with the other unknowns any more and we obtain

$$\partial_t h + \mathrm{div}\vec{V} = 0,$$

$$\partial_t \vec{V} + \mathrm{div}\Big(\frac{\vec{V}\otimes\vec{V}}{h} - \frac{\vec{B}\otimes\vec{B}}{h}\Big) = 0.$$

$$\partial_t \vec{B} + \mathrm{curl}\Big(\frac{\vec{B}\wedge\vec{V}}{h}\Big) = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

We are now going to change our point of view. For that, we begin by introducing a new quantity $\vec{u}$ such that $\vec{V} = h\vec{u}$. Then, we just imagine a fluid submitted to a magnetic field $\vec{B}$. Suppose that h stands for its density ϱ and consider $\vec{u}$ its velocity. Thus, the preceding system can be rewritten with these new unknowns $\varrho, \vec{u}$ and $\vec{B}$, describing then the motion of a compressible fluid under magnetic influence.

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \quad \partial_t(\varrho\vec{u}) + \mathrm{div}\Big(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u} - \frac{\vec{B}\otimes\vec{B}}{\varrho}\Big) = 0,$$

$$\partial_t \vec{B} - \mathrm{curl}(\vec{u}\wedge\vec{B}) = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

We precise that the construction and the signification of these models can be found in [4.1] or [4.2].
Let's remark that this model is really close to a classical MHD one but presents a main difference because it contains no pressure term, that is why this limit model is often called pressureless MHD in the literature. Its relation with the MHD theory gives us the idea to study such a model in the case of compressible viscous fluid completed with a temperature equation and of course some pressure considerations.

4.1.7. Viscous ABI limit model with temperature

In this paragraph, we will finally write the system that we are interesting in. We now consider, in a domain Ω representing a periodic box or the whole space $\mathbb{R}^3$, a compressible fluid of density ϱ, of velocity $\vec{u}$, submitted to an exterior magnetic field $\vec{B}$ and supposed to be viscous and resistive. Noting $\vec{B}^* = \vec{B}/\varrho$, the motion of this fluid can be described by the following system:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \tag{4.1}$$

$$\partial_t(\varrho\vec{u}) + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u} - \varrho\vec{B}^*\otimes\vec{B}^*) + \nabla P - 2\mathrm{div}\big(\mu D(\vec{u})\big) - \nabla(\lambda\mathrm{div}\vec{u}) = 0, \tag{4.2}$$

$$\partial_t(\varrho\vec{B}^*) - \mathrm{curl}(\varrho\vec{u}\wedge\vec{B}^*) + 2\mathrm{curl}(\eta\,\mathrm{curl}\vec{B}^*) = 0, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \tag{4.4}$$

where we have added diffusive terms with viscosity coefficients $\mu = \mu(\varrho)$, $\lambda = \lambda(\varrho)$ and a resistive one $\eta = \eta(\varrho)$. Notice that we also have introduced a pressure term ∇P, we will discuss about it later. We also take into account a fourth equation, on heat conduction, which can take different forms, here is the temperature version :

$$C_v\Big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}\theta)\Big) + r\varrho\theta\mathrm{div}\vec{u} - \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) = 2\mu D(\vec{u}) : D(\vec{u}) + \lambda|\mathrm{div}\vec{u}|^2 + 2\eta|\mathrm{curl}\vec{B}^*|^2. \tag{4.5}$$

θ of course denotes the temperature of the fluid, and $\kappa = \kappa(\varrho,\theta)$ is a thermal conductivity coefficient. To complete this system, we add the following initial conditions

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho\vec{u}|_{t=0} = \vec{m}_0, \quad \vec{B}|_{t=0} = \vec{B}_0, \quad \varrho\tilde{E}|_{t=0} = G_0 + \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\vec{B}_0^*|^2}{2\varrho_0}, \tag{4.6}$$

with the conditions

$$\varrho_0 \geq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \ \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 = 0\}. \tag{4.7}$$

$$G_0(x) \in \overline{\varrho_0(x)e(\varrho_0(x), \mathbb{R}_+)}, \text{ for a.e. } x \in \Omega. \tag{4.8}$$

This assumption on the initial condition G_0 allows us to define the initial condition θ_0 on the set $\{\varrho_0 \neq 0\}$ by

$$\theta_0(x) = e(\varrho_0(x),\cdot)^{-1}\big(\{G_0(x)/\varrho_0(x)\}\big) \geq 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 \neq 0\}. \tag{4.9}$$

We finally add the initial conditions on the magnetic field :

$$\mathrm{div}\vec{B}_0 = 0, \ \frac{|\vec{B}_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 = 0\}. \tag{4.10}$$

Then, we are going to prove a stability result of weak solutions for this last model (4.1)–(4.10) but first describe all the conditions in which the theorem will be enounced.

4.2. Assumptions

4.2.1. Notations

Let resume here all the definitions of the different quantities we will meet in the following statements.
We note $D(\vec{u})$ and $A(\vec{u})$ respectively the symmetric and the skew symmetric part of the velocity gradient

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + {}^t\nabla\vec{u}), \quad A(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} - {}^t\nabla\vec{u}).$$

Let talk about the pressure, we will write it as follows

$$P = p(\varrho,\theta) + p_c(\varrho), \quad p(\varrho,\theta) = r\varrho\theta, \tag{4.11}$$

where p_c is called cold pressure and precised in a next subsection.
We also define some other quantities like

$$\delta = 2\mu D(\vec{u}) + \lambda \mathrm{div}\vec{u}\,\mathbf{I},$$

$$e = C_v\theta + e_c(\varrho), \quad E = e + |\vec{u}|^2/2, \quad \tilde{E} = E + |\vec{B}^*|^2/2,$$

$$h = e + P/\varrho, \quad H = h + |\vec{u}|^2/2, \quad \tilde{H} = H + |\vec{B}^*|^2/2,$$

$$\phi(\varrho) = \mu(\varrho)/\varrho, \quad \varphi'(\varrho) = \mu'(\varrho)/\varrho.$$

Some of them have physical significations, for example, e_c represent an internal energy term, e the specific internal energy, E the specific total energy, h and H specific enthalpies respectively associated to e and E.

4.2.2. Coefficients dependance

First of all, the functions λ and μ are supposed to be respectively $C^0(\mathbb{R}_+)$ and $C^0(\mathbb{R}_+)\cap C^1(\mathbb{R}_+)$ and satisfy

$$\forall s > 0,\ \lambda(s) = 2(s\mu'(s) - \mu(s)). \tag{4.12}$$

Notice that this relation is the first and necessary condition to be able to get the BD formula, the crucial point of the BD-entropy strategy.
We also suppose that $\mu(0) = 0$, that there exists positive constants c_0, c_1, A and $m > 1$, $\frac{2}{3} < n < 1$ such that

$$\forall s < A,\ \mu(s) \geq c_0 s^n,\ 3\lambda(s) + 2\mu(s) \geq c_0 s^n, \tag{4.13}$$

$$\forall s \geq A,\ c_1 s^m \leq \mu(s) \leq \frac{1}{c_1}s^m,\ c_1 s^m \leq 3\lambda(s) + 2\mu(s) \leq \frac{1}{c_1}s^m. \tag{4.14}$$

The diffusive coefficient η is also related to the viscosity μ by

$$\forall s > 0,\ \eta(s) = \mu(s) + c,\ c \geq 0.$$

Next, the thermal conductivity coefficient is assumed to satisfy

$$\kappa(\varrho,\theta) = \kappa_0(\varrho,\theta)(\varrho+1)(\theta^a+1), \tag{4.15}$$

where $a \geq 2$ and κ_0 is a $C^0(\mathbb{R}^2_+)$ function such that

$$\exists C > 0 \ ; \quad C \leq \kappa_0(s_1,s_2) \leq \frac{1}{C}, \quad \forall s_1 > 0, \forall s_2 > 0. \tag{4.16}$$

4.2.3. Cold pressure

The cold pressure p_c is related to the internal energy e_c through the relation

$$p_c(\varrho) = \varrho^2 e_c'(\varrho), \tag{4.17}$$

and must respect all the following constraints :
$\exists \varrho_*, \tau_* > 0,\ k, l > 1,\ C_*, C_*', C_{**}, C_{**}' > 0$ such that

$$\forall \varrho \in (0,\varrho_*), \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*} \leq p_c'(\varrho) \leq C_* \varrho^{-l-1}, \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*'} \leq e_c(\varrho) \leq C_*' \varrho^{-l-1}, \tag{4.18}$$

$$\forall \varrho > \varrho_*, \quad -\frac{1}{\tau_*}\mu'(\varrho) \leq p_c'(\varrho) \leq C_{**}\varrho^{k-1}, \quad 0 \leq e_c(\varrho) \leq C_{**}' \varrho^{k-1}, \tag{4.19}$$

where $l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ et $k \leq \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{5(l+1)-6n}{l+1-n}$.

4.3. Statement of the result

4.3.1. Temperature equation

Let's first say some words on the temperature equation. We can transform (4.5) and thus obtain different equivalent formulations that are more or less adapted to what we are looking for, so here are some different versions. The first form is obtain by adding to (4.5) the equation (4.2) multiplied by $\vec{u}$. It gives

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}(\varrho \vec{u} H) = \mathrm{div}(\delta \cdot \vec{u}) + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta) + 2\eta |\mathrm{curl}\vec{B}^*|^2 + \mathrm{div}(\varrho \vec{B}^* \otimes \vec{B}^*) \cdot \vec{u}. \tag{4.20}$$

The second form is a conservative form, obtained by adding to (4.5) the equation (4.2) multiplied by $\vec{u}$ and the equation (4.3) by $\vec{B}^*$:

$$\begin{aligned} &\partial_t(\varrho \tilde{E}) + \mathrm{div}(\varrho \vec{u} \tilde{H}) = \\ &\mathrm{div}(\delta \cdot \vec{u}) + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta) + 2\mathrm{div}(\eta \mathrm{curl}\vec{B}^* \wedge \vec{B}^*) + \mathrm{div}\big(\varrho(\vec{u} \wedge \vec{B}^*) \wedge \vec{B}^*\big) \end{aligned} \tag{4.21}$$

A last form is possible using another quantity called entropy, defined by $s = C_v \log(\theta/\varrho^\Gamma)$, we can write

$$\theta\big(\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}(\varrho s \vec{u})\big) = 2\mu D(\vec{u}) : D(\vec{u}) + \lambda |\mathrm{div}\vec{u}|^2 + \mathrm{div}(\kappa \nabla \theta) + 2\eta |\mathrm{curl}\vec{B}^*|^2. \tag{4.22}$$

Remark
It will be equivalent to talk about the existence of a solution for (4.1)–(4.6) and for a similar system where (4.5) is replaced by (4.20), (4.21) or (4.22).

4.3.2. Weak solutions

Definition 4.1. *We will understand as weak solution of (4.1)–(4.6), all* $(\varrho, \vec{u}, \vec{B}^*, \theta)$ *satisfying the following conditions :*

(i) equations (4.1)–(4.5) hold in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$*,*
(ii) the initial conditions (4.6) hold in $\mathcal{D}'(\Omega)$ *and (4.7)–(4.10) are satisfied.*
(iii) we have these regularity properties

$$\sqrt{\varrho e},\ \sqrt{\varrho}\vec{u},\ \sqrt{\varrho}\vec{B}^*,\ \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\ \in\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$(\varrho^{n/2}+\varrho^{m/2})\nabla\vec{u},\ \ (\varrho^{n/2}+\varrho^{m/2})\nabla\vec{B}^*,\ \in\ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$(1+\sqrt{\varrho})\nabla\theta^{a/2},\ \ (1+\sqrt{\varrho})\frac{\nabla\theta}{\theta}\ \in\ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$\varrho,\ \varrho\vec{u},\ \varrho\vec{B}^*,\ \varrho E\ \in\ C([0,T];H^{-\sigma}(\Omega)),\ \textit{for } \sigma>0 \textit{ large enough.}$$

4.3.3. Main result

Theorem 4.2. *Let* Ω *be a three dimensional periodic box* $[0,2\pi]^3$ *or the whole space* $\mathbb{R}^3$*. Suppose that initial data satisfy (4.7)–(4.10), suppose that conditions (4.11)–(4.19) hold and that we also have*

$$\int_\Omega \Big(G_0+\frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0}+\frac{|\vec{B}_0|^2}{2\varrho_0}\Big)dx<+\infty,\ \ \frac{\nabla\mu(\varrho_0)}{\sqrt{\varrho_0}}\ \in L^2(\Omega),$$

$$\varrho_0-\varrho_\infty,\ \ \varrho_0\log\Big(\frac{\varrho_\infty}{\varrho_0}\Big),\ \ \varrho_0 e_c(\varrho_0),\ \ \varrho_0 s_0\ \in L^1(\Omega),$$

for some $\varrho_\infty>0$ *and the initial entropy* $s_0=C_v\log(\theta_0/\varrho_0^\Gamma)$*. Then, there exists a global weak solution* $(\varrho,\vec{u},\vec{B}^*,\theta)$ *of the system (4.1)–(4.6).*

The first step of the proof of theorem 4.2 is to build, thanks to a Galerkin method and a priori bounds, a sequence of uniformly bounded and regular weak solutions of these equations. The construction of approximate solutions requires some classical schemes and brings no originality that is why many authors do not detail this point. Thus, we will just focus on the most interesting and difficult issue, say, the weak compactness of any solution ϱ_n, $\vec{u}_n$, $\vec{B}^*_n$, and T_n when n goes to infinity. However, we can find some quick details in [4.6] about the construction of approximate solutions for the Shallow Water model. These ideas can be easily adapted to our model. We can just precise that it is not possible to modify the mass equation, for example by adding a regularizing term, because of the BD strategy which strongly needs it unchanged. Nevertheless we can regularize the velocity (and the temperature) in the momentum equation (and the temperature equation) and thus get some existence result for regular approximate solutions.

A last remark before entering in the technical part of the paper, we will not systematically detail what is not specific to the magnetic case because the non-magnetic model of compressible and heat conducting fluids is completely studied in [4.3] for density-dependent viscosities.

4.4. Energy estimates

Let's first introduce here the deviatoric parts defined by $S(\vec{w}) = D(\vec{w}) - \frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{w}\mathbf{I}$, $\tilde{S}(\vec{w}) = \nabla(\vec{w}) - \frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{w}\mathbf{I}$.

4.4.1. Entropy equation

We can write a first inequality, using the entropy, directly by integrating the equation (4.22) on $(0,t)\times\Omega$:

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\theta_n}\Big(2\mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n) + \big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\Big)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2} + 2\int_0^t\int_\Omega \frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 \le \int_\Omega \big(\varrho_n s_n(t,\cdot) + \varrho_0(s_0)_-\big). \quad (4.23)$$

4.4.2. Energies and BD formula

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2 + \varrho_n|\vec{B}_n^*|^2 + 2C_v\varrho_n\theta_n + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2 + \varrho_n|\vec{B}_n^*|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)$$
$$+\int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 + 2\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n, \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\Big|\vec{u}_n + 2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2 + \varrho_n|\vec{B}_n^*|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)$$
$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)\tilde{S}(\vec{B}_n^*):\tilde{S}(\vec{B}_n^*) + \int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{B}_n^*|^2$$
$$+2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2 + 2c\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 = \quad (4.26)$$
$$-2\int_\Omega \mu'(\varrho_n)p_c'(\varrho_n)\frac{|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n} + \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n - 2\int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho_n.$$

Before looking at the proofs, we want here to insist on the fact that getting the BD formula has not been an easy work and represents a major element for the model. This gives a mathematical structure to the model and we also want to precise that this could not have been possible for any resistivity hypotheses. Indeed, considering density-dependent resistivity profiles, moreover related to the viscosity ones, is an essential point to succeed.

4.4.3. Proofs

–Proof of (4.23) and *(4.24)–*

To get this relation (4.23), we must integrate the equation (4.22) divided by θ_n, and the inequality comes from the positivity of $\varrho_0(s_0)_+$. The relation (4.24) is simply obtained by integrating (4.21). □

–Proof of (4.25)–

▷ We multiply (4.2) by $\vec{u}$ and integrate on Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\vec{u}_n|^2 + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n) : D(\vec{u}_n) + \int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2$$
$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\varrho_n\vec{B}_n^*\otimes\vec{B}_n^*)\cdot\vec{u}_n + \int_\Omega \nabla p_c(\varrho_n)\cdot\vec{u}_n = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n. \tag{4.27}$$

Let's rewrite the two last terms of the left hand side.
For the last one :

$$\int_\Omega \nabla p_c(\varrho_n)\cdot\vec{u}_n = \int_\Omega p_c'(\varrho_n)\nabla\varrho_n\cdot\vec{u}_n = \int_\Omega \frac{H''(\varrho_n)}{2}\nabla\varrho_n\cdot\varrho_n\vec{u}_n,$$

where we have noted $H(\varrho_n) = 2\iint \frac{p_c'(\varrho_n)}{\varrho_n}$. Using (4.1) and integrating by parts, we get

$$\int_\Omega \nabla p_c'(\varrho_n)\cdot\vec{u}_n = \int_\Omega \frac{H'(\varrho_n)}{2}\partial_t\varrho_n = \int_\Omega \frac{1}{2}\partial_t H(\varrho_n).$$

For the other term, $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{B}_n^*\otimes\vec{B}_n^*) = \varrho_n\vec{B}_n^*\cdot\nabla\vec{B}_n^*$ (because $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{B}_n^*) = 0$), so we have

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n) : D(\vec{u}_n) + \int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2$$
$$-\int_\Omega \varrho_n\big(\vec{B}_n^*\cdot\nabla\vec{B}_n^*\big)\cdot\vec{u}_n = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n. \tag{4.28}$$

▷ Moreover, we can multiply (4.3) by $\vec{B}_n^*$ and integrate on Ω :

$$\int_\Omega \partial_t\Big(\frac{\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2}{2}\Big) + \int_\Omega \frac{|\vec{B}_n^*|^2}{2}\partial_t\varrho_n + 2\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 = \int_\Omega (\varrho_n\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n^*)\cdot\mathrm{curl}\vec{B}_n^*,$$

that we can, using (4.1), rewrite as:

$$\int_\Omega \partial_t\Big(\frac{\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2}{2}\Big) + 2\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 + \int_\Omega \varrho_n\big(\mathrm{curl}\vec{B}_n^*\wedge\vec{B}_n^* + \frac{1}{2}\nabla|\vec{B}_n^*|^2\big)\cdot\vec{u}_n = 0. \tag{4.29}$$

▷ Summing (4.28) and (4.29), we get (4.25). □

–Proof of (4.26)–

▷ We begin by rewriting our system.
– We keep unchanged the equation of mass conservation :

$$\partial_t \varrho_n + \mathrm{div}(\varrho_n \vec{u}_n) = 0,$$

But, multiplying it by $\mu'(\varrho_n)/\varrho_n$, derivating with respect to the space variable and multiplying by $2\varrho_n$, we also deduce a relation satisfied by $\vec{v}_n = 2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$:

$$\partial_t(\varrho_n \vec{v}_n) + \mathrm{div}(\varrho_n \vec{u}_n \otimes \vec{v}_n) + 2\nabla\vec{u}_n : \nabla\mu(\varrho_n) + 2\varrho_n \nabla\big(\mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big) = 0$$

– We add this preceding equation to (4.2), to obtain, using the condition (4.12) on the viscosity coefficients λ and μ ($\lambda(\varrho_n) = 2(\varrho_n \mu'(\varrho_n) - \mu(\varrho_n))$) :

$$\partial_t\big(\varrho_n(\vec{u}_n + \vec{v}_n)\big) + \mathrm{div}\big(\varrho_n \vec{u}_n \otimes (\vec{u}_n + \vec{v}_n) - \varrho_n \vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*\big) + \nabla p_c(\varrho_n) + \nabla(r\varrho_n\theta_n)$$
$$-2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n)\big) = 0.$$

– We also rewrite (4.3) using $\vec{v}_n$: remarking that

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* = \mathrm{curl}\big(\eta(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big) - \nabla\eta(\varrho_n) \wedge \vec{B}_n^*,$$

the equation (4.3) becomes (thanks to $\nabla\eta(\varrho) = \nabla\mu(\varrho)$) :

$$\partial_t(\varrho_n \vec{B}_n^*) + 2\mathrm{curl}\Big(\mathrm{curl}\big(\eta(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big)\Big) - \mathrm{curl}\big(\varrho_n(\vec{u}_n + \vec{v}_n) \wedge \vec{B}_n^*\big) = 0.$$

Our system is now

$$\partial_t \varrho_n + \mathrm{div}(\varrho_n \vec{u}_n) = 0, \tag{4.30}$$

$$\partial_t\big(\varrho_n(\vec{u}_n + \vec{v}_n)\big) + \mathrm{div}\Big(\varrho_n\big(\vec{u}_n \otimes (\vec{u}_n + \vec{v}_n) - \vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*\big)\Big) + \nabla p_c(\varrho_n) + \nabla(r\varrho_n\theta_n)$$
$$-2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n)\big) = 0, \tag{4.31}$$

$$\partial_t(\varrho_n \vec{B}_n^*) + 2\mathrm{curl}\Big(\mathrm{curl}\big(\eta(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big)\Big) - \mathrm{curl}\big(\varrho_n(\vec{u}_n + \vec{v}_n) \wedge \vec{B}_n^*\big) = 0. \tag{4.32}$$

▷ We multiply (4.31) by $\vec{u}_n + \vec{v}_n$ and integrate on Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\vec{u}_n + \vec{v}_n|^2 - \int_\Omega \mathrm{div}(\varrho_n \vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*)(\vec{u}_n + \vec{v}_n) + \int_\Omega \nabla p_c(\varrho_n)\cdot\vec{u}_n$$
$$+\int_\Omega \nabla p_c(\varrho_n)\cdot\vec{v}_n + \int_\Omega \nabla(r\varrho_n\theta_n)\cdot\vec{v}_n - \int_\Omega 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n)\big)\cdot(\vec{u}_n + \vec{v}_n) =$$
$$\int_\Omega r\varrho_n\theta_n \mathrm{div}\vec{u}_n.$$

But, for all function ψ, one has

$$\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n)\big)\cdot\nabla\psi = 0,$$

we can then remark that $\operatorname{div}\vec{B}_n = \operatorname{div}(\varrho_n\vec{B}_n^*) = 0$, which allows us to write

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\varrho_n\vec{B}_n^*\otimes\vec{B}_n^*)(\vec{u}_n+\vec{v}_n) = -\int_\Omega \varrho_n(\vec{B}_n^*\cdot\nabla)\vec{B}_n^*\cdot(\vec{u}_n+\vec{v}_n),$$

and then

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\vec{u}_n+\vec{v}_n|^2 - \int_\Omega \varrho_n(\vec{B}_n^*\cdot\nabla)\vec{B}_n^*\cdot(\vec{u}_n+\vec{v}_n) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n e_c(\varrho_n)\\ +\int_\Omega \mu'(\varrho_n)\frac{p_c'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2 + \int_\Omega 2\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)\\ +2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2 + 2\int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho_n = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\operatorname{div}\vec{u}_n.\end{aligned} \tag{4.33}$$

▷ Let's now multiply (4.32) by $\vec{B}_n^*$. Thanks to these two equalities

$$\operatorname{curl}\vec{A}\wedge\vec{A} = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A} - \nabla\Big(\frac{|\vec{A}|^2}{2}\Big) \quad\text{and}\quad \operatorname{curl}\operatorname{curl}A = -\Delta A + \nabla\operatorname{div}A,$$

and recalling that $\eta(\varrho_n) = \mu(\varrho_n) + c$, we get

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\vec{B}_n^*|^2 - \int_\Omega \frac{|\vec{B}_n^*|^2}{2}\operatorname{div}(\varrho_n\vec{u}_n) + \int_\Omega \varrho_n(\vec{u}_n+\vec{v}_n)\cdot\Big((\vec{B}_n^*\cdot\nabla)\vec{B}_n^* - \nabla\Big(\frac{|\vec{B}_n^*|^2}{2}\Big)\Big)\\ +2\int_\Omega \nabla\mu(\varrho_n)\otimes\vec{B}_n^*:\nabla\vec{B}_n^* + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)|\nabla\vec{B}_n^*|^2 + 2c\int_\Omega |\operatorname{curl}\vec{B}_n^*|^2\\ -2\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mu(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big)\operatorname{div}\vec{B}_n^* = 0.\end{aligned} \tag{4.34}$$

▷ To conclude, we sum (4.33) et (4.34) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\Big|\vec{u}_n + 2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2 + \varrho_n|\vec{B}_n^*|^2 + \varrho_n e_c(\varrho_n)\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)\\ +2\int_\Omega \mu(\varrho_n)|\nabla\vec{B}_n^*|^2 + 2c\int_\Omega |\operatorname{curl}\vec{B}_n^*|^2\\ +2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2 - 2\int_\Omega \operatorname{div}\big(\mu(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big)\operatorname{div}\vec{B}_n^*\\ = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\operatorname{div}\vec{u}_n - 2\int_\Omega p_c'(\varrho_n)\frac{\mu'(\varrho_n)|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n} - 2\int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho_n,\end{aligned}$$

and we end to (4.26) with

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\big(\mu(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big)\mathrm{div}\vec{B}_n^* = -\int_\Omega \vec{B}_n\cdot\nabla\Big(\frac{\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big)\mathrm{div}\vec{B}_n^*$$

$$= -\int_\Omega \phi'(\varrho_n)\big(\vec{B}_n\cdot\nabla\varrho_n\big)\mathrm{div}\vec{B}_n^* = \int_\Omega \varrho_n^2\phi'(\varrho_n)\Big(\vec{B}_n\cdot\nabla\Big(\frac{1}{\varrho_n}\Big)\Big)\mathrm{div}\vec{B}_n^*$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{B}_n^*|^2. \ \square$$

4.4.4. Estimates on ϱ_n, $\vec{u}_n$, $\vec{B}_n$ and T_n

In this paragraph, we are going to say some words about how to bound some integral terms in the right hand sides of (4.23)–(4.26) and we will see that Gronwall arguments lead finally to interesting estimates.

4.4.4.1. Control of right hand sides

For the equation (4.24), with no right hand side, we already have estimates, namely, $\varrho_n|\vec{u}_n|^2$, $\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2$, $\varrho_n\theta_n$ and $\varrho_n e_c(\varrho_n)$ are bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ thanks to the equation

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2+2C_v\varrho_n\theta_n+2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot) \le \int_\Omega \Big(G_0+\frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0}+\frac{|\vec{B}_0|^2}{2\varrho_0}\Big). \quad (4.35)$$

Then let's try to deal with the other equations (4.23), (4.25) and (4.26), for that, we must take care of the order in which we are going to proceed.

• First, we have, for equation (4.23), recalling that $s_n = C_v\log(\theta_n/\varrho_n^\Gamma)$,

$$\int_\Omega \varrho_n s_n(t,\cdot) \le \int_\Omega \varrho_n C_v\theta_n(t,\cdot) + \int_\Omega \Gamma C_v\varrho_n\log(\varrho_\infty/\varrho_n),$$

and to control the last integral term, we may use a renormalized version of the mass conservation equation for $\beta_\infty(\varrho_n) = \varrho_n\log(\varrho_\infty/\varrho_n)$ as follows

$$\partial_t\beta_\infty(\varrho_n) + \mathrm{div}(\beta_\infty(\varrho_n)\vec{u}_n) - \varrho_n\mathrm{div}\vec{u}_n = 0.$$

Then,

$$\int_\Omega \varrho_n s_n(t,\cdot) \le \int_\Omega \varrho_n C_v\theta_n(t,\cdot) + \Gamma C_v\Big(\int_\Omega \beta_\infty(\varrho_0) + \int_0^t\int_\Omega \varrho_n|\mathrm{div}\vec{u}_n|\Big).$$

Thanks to the conditions $n>1$ and $m<1$ we can assure that $\frac{\varrho_n}{3\lambda(\varrho_n)+2\mu(\varrho_n)}$ is bounded in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, that is why we can write

$$\int_0^t \int_\Omega \varrho_n |\mathrm{div} \vec{u}_n| \leq \int_0^t \int_\Omega \Big(\frac{\varepsilon}{\theta_n} \big(3\lambda(\varrho_n) + 2\mu(\varrho_n)\big) |\mathrm{div} \vec{u}_n|^2 + \frac{\sqrt{C}}{\varepsilon} \varrho_n \theta_n \Big).$$

Reminding that $\varrho_n\theta_n$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ and choosing $\varepsilon < 1/3$, we get, for all $t \in (0,T)$,

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\theta_n} \Big(2\mu(\varrho_n) S(\vec{u}_n) : S(\vec{u}_n) + (1-3\varepsilon)\big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big) |\mathrm{div} \vec{u}_n|^2 \Big)$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega \kappa(\varrho_n, \theta_n) \frac{|\nabla \theta_n|^2}{\theta_n^2} + 2 \int_0^t \int_\Omega \frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n} |\mathrm{curl} \vec{B}_n^*|^2 \leq C_{T,0}. \tag{4.36}$$

• Now is the turn of equation (4.25) and (4.26) :

$$\int_\Omega \mu'(\varrho_n) p_c'(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n} \geq c_0 \int_\Omega |\nabla \zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2 - \frac{1}{\tau_*} \int_\Omega \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n},$$

where we have chosen the function ζ, smooth on $\mathbb{R}_+$, and satisfying $\zeta(\varrho_n) = \varrho_n$ for $\varrho_n \leq \varrho_*/2$ and $\zeta(\varrho_n) = 0$ for $\varrho_n > \varrho_*$. The first term of this right hand side, which is positive, will appear in the left hand side of (4.26) and the second will stay in the right hand side of (4.26) to apply a Gronwall's lemma.
From an other hand, (4.36) shows that $\sqrt{\kappa(\varrho_n, \theta_n)} \frac{\nabla \theta_n}{\theta_n}$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. In addition to conditions (4.15) and (4.16) with $a \geq 2$, we can write, after using a Cauchy-Schwarz inequality,

$$\Big| \int_\Omega r \mu'(\varrho_n) \nabla \theta_n \cdot \nabla \varrho_n \Big| \leq \int_\Omega \kappa(\varrho_n, \theta_n) \frac{|\nabla \theta_n|^2}{\theta_n^2} + \int_\Omega C \frac{r^2 \varrho_n \theta_n^2}{\kappa(\varrho_n, \theta_n)} \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}$$
$$\leq C \Big(1 + \int_\Omega \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} \Big),$$

also giving an integral term dedicated to a Gronwall's lemma.
For the last integral term, we write :

$$\Big| \int_\Omega r \varrho_n \theta_n \mathrm{div} \vec{u}_n \Big| \leq \varepsilon \big\| \big(3\lambda(\varrho_n) + 2\mu(\varrho_n)\big)^{1/2} \mathrm{div} \vec{u}_n \big\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|\varrho_n \theta_n\|_{L^1(\Omega)}^2$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon} \Big(1 + \|\theta_n\|_{L^6(\Omega)}^2 \Big) \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla \mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n} + \eta \|\varrho_n\|_{L^1(\Omega)}^2 \Big),$$

The second term of the right hand side of this inequality is known to be bounded thanks to (4.35). So we finally get, summing (4.25) and (4.26), for all $\varepsilon < 1/6$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \Big(\varrho_n |\vec{u}_n|^2 + \varrho_n \Big| \vec{u}_n + 2 \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \Big|^2 + 2\varrho_n |\vec{B}_n^*|^2 + 4\varrho_n e_c(\varrho_n) \Big)$$
$$+2 \int_\Omega \mu(\varrho_n) S(\vec{u}_n) : S(\vec{u}_n) + (1-6\varepsilon) \int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n) \big) |\mathrm{div} \vec{u}_n|^2$$

$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)+2\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)\tilde{S}(\vec{B}_n^*):\tilde{S}(\vec{B}_n^*)$$

$$+\int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{B}_n^*|^2+2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2+c_0\int_\Omega |\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2$$

$$+2c\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 \le C\Big(1+\|\theta_n\|^2_{L^6(\Omega)}\Big)\Big(\eta\|\varrho_n\|^2_{L^1(\Omega)}+\int_\Omega \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\Big)+C'. \tag{4.37}$$

To conclude, we apply a Gronwall lemma, we will talk about it in the next subsection.

4.4.4.2. Gronwall's lemma

By (4.37), we have obtained in particular :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2\Big)$$

$$\le C\Big(1+\|\theta_n\|^2_{L^6(\Omega)}\Big)\Big(\eta\|\varrho_n\|^2_{L^1(\Omega)}+\int_\Omega \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\Big)+C'. \tag{4.38}$$

Then we remark that $\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\le\frac{1}{2}\Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2\Big)$.
Moreover, thanks to the mass conservation equation, we know that $\|\varrho_n\|_{L^1(\Omega)}=\|\varrho_0\|_{L^1(\Omega)}$, and, thanks to lemma 4.6, θ_n is bounded in $L^2(0,T;L^6(\Omega))$. Then (4.38) looks like a form $\partial_t f_n\le g_nf_n+h_n$ with g_n and h_n two sequences bounded in $L^1_{loc}((0,T)\times\Omega)$, what allows us to apply the corresponding Gronwall's lemma to get the expected informations recapitulated in the following subsection.

4.4.4.3. A priori estimates

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\theta_n}\Big(2\mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)+\big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\Big)$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2}+2\int_0^t\int_\Omega\frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2\le C_{T,0},$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2+2C_v\varrho_n\theta_n+2\varrho_ne_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)\le\int_\Omega\Big(\frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0}+\frac{|\vec{B}_0|^2}{2\varrho_0}+G_0\Big),$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2+2\varrho_ne_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)+2\int_0^t\int_\Omega \mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2+2\int_0^t\int_\Omega\eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2$$

$$\leq C_{T,0} + \int_\Omega \Big(\frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\vec{B}_0|^2}{2\varrho_0} + \varrho_0 e_c(\varrho_0) \Big),$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\varrho_n \Big| \vec{u}_n + 2\frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \Big|^2 + \varrho_n |\vec{B}_n^*|^2 + 2\varrho_n e_c(\varrho_n) \Big)(t,\cdot)$$

$$+2\int_0^t \int_\Omega \mu(\varrho_n) A(\vec{u}_n) : A(\vec{u}_n) + 2\int_0^t \int_\Omega \mu(\varrho_n) \tilde{S}(\vec{B}_n^*) : \tilde{S}(\vec{B}_n^*)$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n) \big) |\mathrm{div}\vec{B}_n^*|^2 + 2c\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega \frac{r\theta_n \mu'(\varrho_n)}{\varrho_n} |\nabla \varrho_n|^2$$

$$+c_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla \zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2 \leq C_{T,0} + \int_\Omega \Big(\frac{|\vec{m}_0 + 2\nabla \mu(\varrho_0)|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} + \varrho_0 e_c(\varrho_0) \Big).$$

Proposition 4.3. *Thanks to the inequalities summarized here and refering to the conditions on initial data cited in theorem 4.2, we conclude that*

$$\sqrt{\varrho_n \theta_n},\ \sqrt{\varrho_n e_c(\varrho_n)},\ \sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n,\ \sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^*,\ \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}} \tag{4.39}$$

are uniformly bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *and that*

$$\sqrt{\mu(\varrho_n)}\nabla \vec{u}_n,\ \mathrm{curl}\vec{B}_n^*,\ \sqrt{\mu(\varrho_n)}\nabla \vec{B}_n^*, \tag{4.40}$$

$$\nabla \zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}},\ \sqrt{\frac{r\theta_n \mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}}\nabla \varrho_n, \tag{4.41}$$

$$\sqrt{\frac{\mu(\varrho_n)}{\theta_n}}\nabla \vec{u}_n,\ \sqrt{\kappa(\varrho_n,\theta_n)}\frac{\nabla \theta_n}{\theta_n},\ \sqrt{\frac{\mu(\varrho_n)}{\theta_n}}\mathrm{curl}\vec{B}_n^*, \tag{4.42}$$

are uniformly bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$*, independently of* n*.*

These bounds don't seem to be sufficient to pass to the limit in every terms, especially in the non linear ones, in the sense of distributions, so we are led to find some additional assumptions provided by compactness properties.

4.5. Auxiliary bounds

Since ϱ_n, $\vec{u}_n$ and θ_n satisfy the same bounds as in [4.3], we can state some results that are proved in [4.3] and that are correct even in our new settings. Moreover, we can remark, in the preceding estimates, that bounds on $\vec{u}_n$ are also satisfy by $\vec{B}_n^*$, that is why we will obtain informations on $\vec{B}_n^*$ taking advantage of this parallel between $\vec{u}_n$ and $\vec{B}_n^*$.

4.5.1. Density, velocity and magnetic field

Lemma 4.4.

$$\varrho_n^{-1/2} \text{ is uniformly bounded in } L^\infty(0,T;L^6_{loc}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_{loc}(\Omega)), \tag{4.43}$$

$$\varrho_n \text{ is uniformly bounded in } L^\infty(0,T;L^{6m-3}_{loc}(\Omega)), \tag{4.44}$$

and there exists some constants $q_1 > 1$ and $q_2 > 1$ such that

$$\vec{u}_n \text{ and } \vec{B}^*_n \text{ are bounded in } L^{q_1}(0,T;W^{1,q_2}_{loc}(\Omega)). \tag{4.45}$$

Proof The first estimate is related to the cold pressure term.
Indeed, on the one hand, we know that $\varrho_n e_c(\varrho_n)$ is uniformly bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ which implies that $\varrho_n^{-1/2}$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^{2l}_{loc}(\Omega))$ thanks to the conditions (4.18) and (4.19). Refering to subsection 4.2.3 which supposes that $l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ with $m > 1 > n$, we deduce that $l \geq 3$.
On the other hand, thanks to (4.41), let's now recall that $\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Then, thinking that $l > 1 > n$ and the definiton of the function ζ, we conclude that $\nabla\varrho_n^{-1/2}$ is also bounded in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$.

Concerning the bounds on positive powers of the density, we will get it through estimates on $\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}$.
For all $s \in L^1(\Omega)$ such that $s^{-1/2}\nabla\mu(s) \in L^2(\Omega)$, we have

$$\|s^{m-1/2}\mathbf{1}_{s>A}\|_{L^6(\Omega)} \leq C\Big(\Big\|\frac{\nabla\mu(s)}{\sqrt{s}}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|s\|^{m-1/2}_{L^1(\Omega)}\Big), \tag{4.46}$$

$$\|s^{n-1/2}\mathbf{1}_{s<A}\|_{L^6(\Omega)} \leq C\Big(\Big\|\frac{\nabla\mu(s)}{\sqrt{s}}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|s\|^{n-1/2}_{L^1(\Omega)}\Big), \tag{4.47}$$

These inequalities (proved in [4.3]) come from classical Sobolev embeddings and Jensen's inequality.

Just writing $\nabla\vec{u}_n = \varrho_n^{-\frac{n}{2}}\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n$, the following estimate holds for any bounded subset B of Ω:

$$\|\nabla\vec{u}_n\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(B))} \leq C_B\Big(1 + \|\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{n}{2}}\|_{L^{2j}(0,T;L^{6j}(\Omega))}\Big)\|\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)},$$

with $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2j} + \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{6j} + \frac{1}{2}$. Then choosing $j = \frac{l+1-n}{n}$, one obtains

$$\|\nabla\vec{u}_n\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(B))} \leq C_B\Big(1 + \|\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\Big)\|\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}.$$

From estimate (4.40) on $\sqrt{\mu}\nabla\vec{u}$ together with (4.43) on negative powers of the density, we can assure the expected bound on $\vec{u}_n$.
Exactly the same inequality can be written replacing $\vec{u}_n$ by $\vec{B}^*_n$ with the same conditions on q_1 and q_2, so, thanks to estimates (4.39)–(4.42), we get the last bound on $\vec{B}^*_n$. We can remark that conditions on coefficients l, n, m and k given at the beginning, precisely $l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ and $n < 1 < m$, lead to

$$q_1 > \frac{5m-3}{3m-2} > \frac{5}{3} \quad\text{and}\quad q_2 > \frac{3(5m-3)}{8m-5} > \frac{15}{8}.$$

We notice that all the inequalities between l, n, m and k given in the section 4.2 are related to such conditions but we will not exhaustively recall it in this paper, we can refer to [4.3] for complete details. □

As a direct consequence of the uniform bounds given in lemma 4.4, we can enounce the following result:

Lemma 4.5. *There exists $\delta > 3$ such that $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ and $\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*$ are bounded in $L^\delta((0,T)\times B)$ for all bounded subset B in Ω.*

Proof This proposition simply relies on the observation that

$$\varrho_n^{1/3}|\vec{u}_n| = \varrho_n^{1/3-\alpha}\varrho_n^\alpha|\vec{u}_n|^{2\alpha}|\vec{u}_n|^{1-2\alpha},$$

with a coefficient $\alpha \in [0, 1/3]$ to be determined. Consider now a bounded subset $B \subset \Omega$, and write

$$\|\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n\|_{L^s(0,T;L^r(B))} \leq \|\varrho_n\|^{1/3-\alpha}_{L^\infty(0,T;L^p(B))}\|\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n\|^{2\alpha}_{L^\infty(0,T;L^2(B))}\|\vec{u}_n\|^{1-2\alpha}_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(B))},$$

where r and s are given by the following equalities

$$\frac{1}{s} = \frac{1-2\alpha}{q_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\Big(\frac{1}{3}-\alpha\Big) + \alpha + \frac{1-2\alpha}{q_2}$$

Note that we have the choice of $1 \leq p \leq 6m-3$ thanks to (4.44).
We now wonder if there exists a constant $\alpha \in [0, 1/3]$ such that r and s can be greater than 3. This implies the conditions on α:

$$\alpha > \frac{3-q_1}{6} \quad \text{and} \quad 3\alpha(pq_2 - 2p - q_2) < pq_2 - 3p - q_2).$$

This is possible as soon as $q_1 \in (1,2)$ and $\frac{1}{6m-3} + \frac{2q_1}{q_2(q_1-1)} < 1$. Remark that this last condition leads to $l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ announced in section 4.2. $\square$

4.5.2. Temperature

Lemma 4.6. $\theta_n^{\frac{a-c+1}{2}}$ *is bounded in $L^2(0,T;L^6(\Omega))$ for all $0 < c \leq 1$ and there exists $p > 1$ such that $\kappa(\varrho_n,\theta_n)\nabla\theta_n$ is bounded in $L^p(0,T;L^p(\Omega))$.*

Proof For all nondecreasing concave function f from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}$, one has

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f'(\theta_n)}{C_v}\Big(2\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n) : D(\vec{u}_n) + \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 + 2\eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n^*|^2\Big) \\ - \int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{f''(\theta_n)}{C_v}|\nabla\theta_n|^2 \\ \leq \frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n\Big(f(\theta_n) - \log(\varrho_n/\varrho_\infty)\Big) + \int_\Omega \varrho_n|(\Gamma\theta_n f'(\theta_n) - 1)\mathrm{div}\vec{u}_n|. \end{aligned} \tag{4.48}$$

This inequality on the temperature field is obtained by multiplying (4.5) by $\frac{f'(\theta_n)}{C_v}$ and using the mass conservation equation. We can notice that the presence of $\vec{B}_n^*$ does not bring major difficulties.
Now, choosing for example $f'(s) = s^{-c}$, with $0 < c \leq 1$ and thinking to the conditions (4.15) (recall that $a \geq 2$), we also get

$$(1+\sqrt{\varrho_n})\nabla\theta_n^{\frac{a-c+1}{2}} \text{ is bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.49}$$

For the second integrability, we are only studying the most difficult part of $\kappa(\varrho_n,\theta_n)\nabla\theta_n$, i.e. $\varrho_n\theta_n^a\nabla\theta_n$, see (4.15). We can write

$$\varrho_n\theta_n\nabla\theta_n = \sqrt{\varrho_n}\theta_n^{\frac{a+c+1}{2}}\sqrt{\varrho_n}\theta_n^{\frac{a-c-1}{2}}\nabla\theta_n$$

so that it remains to control $\sqrt{\varrho_n}\theta_n^{\frac{a+c+1}{2}}\nabla\theta_n$ in $L^r(0,T;L^r(\Omega))$ for some $r > 2$. Then, with (4.48) and bound (4.39) on $\varrho_n\theta_n$, we can say that $\varrho_n\theta_n^{a+c+1} = (\varrho_n\theta_n)^\beta\varrho_n^{1-\beta}\theta_n^{a+c+1-\beta}$ is bounded in $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ if we note

$$\frac{1}{p} = \frac{a+c+1-\beta}{a-c+1}, \quad \frac{1}{q} = \beta + \frac{2(a+c+1-\beta)}{3(a-c+1)} + \frac{1-\beta}{6m-3}.$$

The question is now to know if we are able to take some constants $p > 1$ and $q > 1$ with these conditions. It is possible supposing

$$2c < \beta \quad \text{and} \quad \beta\big((a-c)(6m-4)+2m-2\big) < 2(a+c+1)(1-2m)+(6m-4)(a-c+1).$$

We can treat the term $\varrho_n\nabla\theta_n$ in a similar way and the part $(1+\varrho_n)\nabla\theta_n$ is bounded because we know that $(1+\sqrt{\varrho_n})\nabla\theta_n$ and $\sqrt{\varrho_n}$ are respectively bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $L^\infty(0,T;L^{2(6m-3)}_{loc}(\Omega))$. $\square$

4.6. Compacity results

Uniform bounds cited in paragraph 4.4.4.3 only give some weak convergences, but in order to pass to the limit when n goes to $+\infty$, we are led to prove several strong convergences especially for the nonlinear terms.

4.6.1. Using the mass conservation equation

We know, thanks to (4.44), that ϱ_n converges weakly to ϱ in $L^\infty(0,T;L^{6m-3}_{loc}(\Omega))$, with $m > 1$. To prove a strong compactness on the density, we shall use the transport equation satisfy by $\tilde{\mu}(\varrho_n)$, where $\tilde{\mu}(s) = s^n + s^m$:

$$\partial_t(\tilde{\mu}(\varrho_n)) + \mathrm{div}(\tilde{\mu}(\varrho_n)\vec{u}_n) + \frac{1}{2}\tilde{\lambda}(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n = 0,$$

with $\tilde{\lambda}(s) = 2((m-1)s^m + (n-1)s^n)$.
Proving that $\partial_t(\phi\tilde{\mu}(\varrho_n))$ is bounded in $L^2(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ for any compactly supported function ϕ, (this point is proved in [4.3]), we then conclude

$$\varrho_n \to \varrho \text{ in } C([0,T];L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall q < 6m-3. \tag{4.50}$$

From another point, to get a strong compactness on $\varrho_n^{-1/2}$, we must look at $\partial_t(\varrho_n^{-1/2})$ and try to show a boundedness in a space $L^r(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ with $r > 1$. From the transport equation we find

$$\partial_t(\varrho_n^{-1/2}) - \frac{3}{2}\varrho_n^{-1/2}\mathrm{div}\vec{u}_n + \mathrm{div}(\varrho_n^{-1/2}\vec{u}_n) = 0,$$

from which we can insure that $\partial_t(\varrho_n^{-1/2})$ is bounded in $L^{5/3}(0,T;W^{-1,\frac{30}{11}}(\Omega))$. Then, from (4.43), we can deduce that

$$\varrho_n^{-1/2} \to \varrho^{-1/2} \text{ in } L^p(0,T;L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall p < +\infty,\ \forall q < 6. \tag{4.51}$$

4.6.2. For $\varrho_n\vec{u}_n$

We know that $\varrho_n\vec{u}_n$ converges weakly to $\varrho\vec{u}$ in $L^\infty(0,T;L^{3/2}_{loc}(\Omega))$ as the product of $\sqrt{\varrho_n}$ bounded in $L^\infty(0,T;L^{2(6m-3)}_{loc}(\Omega))$, with $m > 1$ and $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. To have compactness on $\varrho_n\vec{u}_n$, we will of course use the momentum equation to assure that $\partial_t(\varrho_n\vec{u}_n)$ is bounded in $L^p_{loc}(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ for $p > 1$ and σ_0 large enough. For the proof, we can see in [4.3] but, to be precise on what is different in our new system we shall not forget that we have the new term in the momentum equation related to the magnetic field. Nevertheless, since $\vec{u}_n$ and $\vec{B}^*_n$ are very similar, this new term $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{B}^*_n \otimes \vec{B}^*_n)$ is bounded as $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{u}_n \otimes \vec{u}_n)$, that is to say, uniformly in $L^{3/2}(0,T;L^{9/7}_{loc}(\Omega))$ as the product of $|\varrho_n^{1/3}\vec{B}^*_n|^2$ bounded in $L^{3/2}(0,T;L^{3/2}_{loc}(\Omega))$ thanks to lemma 4.5 and $\varrho_n^{1/3}$ bounded in $L^\infty(0,T;L^{3(6m-3)}_{loc}(\Omega))$. We get

$$\varrho_n\vec{u}_n \to \varrho\vec{u} \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega)),\ \forall p < +\infty,\ \forall q < 3. \tag{4.52}$$

A first consequence, from (4.52) together with (4.45), is the strong convergence of the term $\int_B \varrho_n|\vec{u}_n|^2$ to $\int_B \varrho|\vec{u}|^2$, for all bounded subset B in Ω. Moreover, since $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ converges weakly to $\sqrt{\varrho}\vec{u}$ in $L^\infty(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$ (coming from (4.39)), we insure that

$$\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n \to \sqrt{\varrho}\vec{u} \text{ in } L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega)). \tag{4.53}$$

To continue, writing $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n = \varrho_n^{-1/6}\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$, the preceding strong convergence with statement (4.43) suffice to show that $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ converges strongly to $\varrho^{1/3}\vec{u}$ in $L^1(0,T;L^1_{loc}(\Omega))$. Since $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ is also uniformly bounded in $L^\delta(0,T;L^\delta_{loc}(\Omega))$, we deduce

$$\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n \to \varrho^{1/3}\vec{u} \text{ in } L^3(0,T;L^3_{loc}(\Omega)). \tag{4.54}$$

4.6.3. For $\vec{B}_n$

To carry on the relation between $\vec{u}_n$ and $\vec{B}_n^*$, we will now try to state a similar strong convergence on $\varrho_n\vec{B}_n^* = \vec{B}_n$. As weak convergence, thinking that $\vec{B}_n = \sqrt{\varrho_n}\sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^*$, we can assure that $\vec{B}_n \rightharpoonup \vec{B}$ in $L^\infty(0,T;L^{3/2}_{loc}(\Omega))$. We are now going to look at the bounds on $\partial_t\vec{B}_n$. The equation of the magnetic field (4.3) will be managed as the momentum equation was in the paragraph 4.6.2, bringing together the terms $\mathrm{curl}(\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^*)$ and $\mathrm{div}(\mu(\varrho_n)\nabla\vec{u}_n)$ and we can hope that the term $\mathrm{curl}(\varrho_n\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n^*)$ will behave as $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{u}_n\otimes\vec{u}_n)$ in (4.2). Indeed, we can write

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* = \sqrt{\eta(\varrho_n)}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \text{ bounded in } L^2(0,T;L^{3/2}_{loc}(\Omega)),$$

$$\varrho_n\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n^* = \varrho_n^{1/3}\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n\wedge\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^* \text{ bounded in } L^{3/2}(0,T;L^{9/7}_{loc}(\Omega)).$$

Let's justify these bounds.

On the one hand, equation (4.44) insures that the sequence $\sqrt{\eta(\varrho_n)}$ is bounded in the space $L^\infty(0,T;L_{loc}^{\frac{2(6m-3)}{n}}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^6_{loc}(\Omega))$ and we know that $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^*$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ thanks to (4.40).

On the other hand, (4.46) and lemma 4.5 respectively insure that $\varrho_n^{1/3}$ is bounded in $L^\infty(0,T;L_{loc}^{\frac{3(6m-3)}{n}}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;L^9_{loc}(\Omega))$ and that $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n\wedge\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*$ is bounded in the space $\left(L^\delta(0,T;L^\delta_{loc}(\Omega))\right)^2 = L^{\delta/2}(0,T;L^{\delta/2}_{loc}(\Omega))$, where $\delta > 3$.

We conclude that $\partial_t\vec{B}_n$ is bounded in $L^{3/2}(0,T;W^{-1,9/7}_{loc}(\Omega))$ and then

$$\vec{B}_n = \varrho_n\vec{B}_n^* \to \vec{B} = \varrho\vec{B}^* \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega)),\ \forall p < +\infty,\ \forall q < 3. \tag{4.55}$$

As for $\vec{u}_n$ in the subsection 4.6.2, we can take the same way for $\vec{B}_n^*$ and enounce :

$$\sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^* \to \sqrt{\varrho}\vec{B}^* \text{ in } L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega)). \tag{4.56}$$

$$\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^* \to \varrho^{1/3}\vec{B}^* \text{ in } L^3(0,T;L^3_{loc}(\Omega)). \tag{4.57}$$

4.6.4. Using the temperature equation

We want to follow the method exposed in [4.3] but our new equation (4.20) on the specific total energy E_n present two added terms which are quite cumbersome. That is why we have written another equivalent equation (4.21), because this new one is conservative. And we are going to transport here the role of E_n on $\tilde{E}_n$. So let's show a strong convergence on $\varrho_n\tilde{E}_n$ instead of $\varrho_n E_n$. We know that $\varrho_n\tilde{E}_n$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ by (4.24) and we want to show an adapted boundedness on $\partial_t(\varrho_n\tilde{E}_n)$ to insure compacity. Without magnetic field, that is to say in the conditions of [4.3], one can show that $\partial_t(\varrho_n E_n)$ is bounded in $L^q_{loc}(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega))$ for some $q > 1$. In order to have a similar result, we are now just going to explain why our three new terms $\mathrm{div}\big(\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^*\wedge\vec{B}_n^*\big)$, $\mathrm{div}\big(\varrho_n(\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n^*)\wedge\vec{B}_n^*\big)$ and $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{u}_n\frac{|\vec{B}_n^*|^2}{2})$ are also bounded in a similar space. To get it, we begin to write

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \vec{B}_n^* = \varrho_n^{-1/3}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*$$

Estimate (4.44) imply that $\varrho_n^{-1/3}\sqrt{\eta(\varrho_n)}$ is bounded in $L^\infty(0,T;L_{loc}^{\frac{6m-3}{m/2-1/3}}(\Omega))$ which is included in $L^\infty(0,T;L_{loc}^{12}(\Omega))$. Next, estimate (4.40) says that the sequence $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^*$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*$ is bounded in $L^3(0,T;L_{loc}^3(\Omega))$ by lemma 4.5. Conclusion : $\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \vec{B}_n^*$ is bounded in $L^{6/5}(0,T;L_{loc}^{12/11}(\Omega))$.
For the other terms, the same decomposition will be conclusive :

$$\varrho_n(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n^*) \wedge \vec{B}_n^* = (\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n \wedge \varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*) \wedge \varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*$$

$$\varrho_n\vec{u}_n|\vec{B}_n^*|^2 = \varrho_n^{1/3}\vec{u}_n|\varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*|^2.$$

So, Lemma 4.5 insures that these quantities are uniformly bounded in the product space $\Big(L^\delta(0,T;L_{loc}^\delta(\Omega))\Big)^3 = L^{\delta/3}(0,T;L_{loc}^{\delta/3}(\Omega))$, with $\delta/3 > 1$.
We are now able to assert that

$$\varrho_n\tilde{E}_n \to \varrho\tilde{E} \text{ in } C([0,T];H^{-\sigma_0}(\Omega)).$$

We also can deduce some compactness more directly related to the temperature:

Lemma 4.7.

$$\sqrt{\varrho_n}\theta_n \to \sqrt{\varrho}\theta \text{ in } L_{loc}^2(0,T;L_{loc}^2(\Omega)),$$

$$\theta_n^{a/2} \to \theta^{a/2} \text{ in } L_{loc}^2(0,T;L_{loc}^6(\Omega)).$$

Proof The proof is greatly detailed in [4.3] and it is here a very little bit different, only because of the added term coming from the presence of a magnetic field. We must deal with what is new, precisely with $\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2$ appearing in $\varrho_n\tilde{E}_n$. But, once again, we can take advantage of the parallel between $\vec{u}_n$ and $\vec{B}_n^*$ and all what is done for $\varrho_n|\vec{u}_n|^2$ is exactly applicable to $\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2$. In particular, what is required is the strong convergence of $\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2$ to $\varrho|\vec{B}^*|^2$ in $L^1(0,T;L_{loc}^1(\Omega))$, which is given by (4.56).
Next, putting together the result of lemma 4.7 with the strong convergence of $\varrho_n^{-1/2}$ given by (4.51) and the bound on $\theta_n^{\frac{a-c+1}{2}}$ of lemma 4.6, we finally obtain the secont compactness which is a crucial point to get the limit in the thermal conductivity term. □

4.7. Convergences

For the mass conservation equation, we can recall the strong convergence of ϱ_n to ϱ in $C([0,T];L^2(\Omega))$ and the strong convergence of $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ to $\sqrt{\varrho}\vec{u}$ in $L^2(0,T;L_{loc}^2(\Omega))$.

For the momentum equation, we just have to justify how to pass to the limit in the term $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*)$. It is not worth saying that all occures as for the corresponding term on $\vec{u}_n$. The needed estimates are (4.45) and (4.55) to show that $\varrho_n \vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*$ converges to $\varrho \vec{B}^* \otimes \vec{B}^*$ in the sense of distributions.

Now is the time to deal with the magnetic field equations. First of all, (4.55) insures the limit passage in the equation (4.4). Next, it is question of equation (4.3). One more time, everything can be copied on what is done for (4.2), thanks to the correspondance between $\vec{u}$ and $\vec{B}^*$, but we are going to detail it now. The convergence (4.55) suffices to pass to the limit in $\partial_t(\varrho_n \vec{B}_n^*)$ in the sense of distributions. The second term $\mathrm{curl}(\varrho_n \vec{u}_n \wedge \vec{B}_n^*)$ of (4.3) is close to $\mathrm{div}(\varrho_n \vec{B}_n^* \otimes \vec{B}_n^*)$, and it is clear with (4.45) and (4.52) again. For the last one $\mathrm{curl}(\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^*)$, we proceed as for $\mathrm{div}\big(\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n)\big)$, namely, by writing

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* = \mathrm{curl}\big(\eta(\varrho_n)\vec{B}_n^*\big) + \sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^* \wedge \frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}.$$

For the first term, we can remind us the strong convergences of $\frac{\eta(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}$ and $\sqrt{\varrho}_n \vec{B}_n^*$ in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$. For the second, we conclude with the strong convergence of $\sqrt{\varrho_n}\vec{B}_n^*$ and the weak one of $\frac{\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}$ in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$.

For the temperature equation we can choose between the different forms we cited before. Let's look at (4.21). In addition to what is proved in [4.3], we must justify how to pass to the limit in $\partial_t(\varrho_n|\vec{B}_n^*|^2)$, $\mathrm{div}(\varrho_n\vec{u}_n|\vec{B}_n^*|^2)$, $\mathrm{div}\big(\varrho_n(\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n^*)\wedge\vec{B}_n^*\big)$ and $\mathrm{div}(\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \vec{B}_n^*)$. For the first it is clear with the convergence (4.56), for the next two too with (4.54) and (4.57). For the last one, we begin by writing

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \vec{B}_n^* = \frac{\sqrt{\eta(\varrho_n)}}{\varrho_n^{1/3}}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^* \wedge \varrho_n^{1/3}\vec{B}_n^*.$$

Then $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n^*$ converges weakly to $\sqrt{\eta(\varrho)}\mathrm{curl}\vec{B}^*$ in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$ because of (4.40), so that we must have strong convergences in big enough spaces for the two other terms. The third one converges strongly in $L^3(0,T;L^3_{loc}(\Omega))$, so we hope for a strong convergence in $L^6(0,T;L^6_{loc}(\Omega))$ for the first one. Of course, (4.50) insures that $\frac{\sqrt{\eta(\varrho_n)}}{\varrho_n^{1/3}}$ converges strongly to $\frac{\sqrt{\eta(\varrho)}}{\varrho^{1/3}}$ at least in the space $C([0,T];L^6_{loc}(\Omega))$. This achieve the proof of the convergence of the approximate solutions to solutions of (4.1)–(4.4) and (4.21).

4.8. The Augmented Born-Infeld model

Let's finally come over the first model cited in this paper and justify that all what is done in the first part can be applied to it. Noting, as for $\vec{B}$, $\vec{D}^* = \vec{D}/\varrho$, we are now interested in studying the following model

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \tag{4.58}$$

$$\partial_t(\varrho\vec{u}) + \mathrm{div}\big(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u} - \varrho\vec{B}^*\otimes\vec{B}^* - \gamma^2\varrho\vec{D}^*\otimes\vec{D}^*\big) + \nabla\big(P - \gamma^2/\varrho\big)$$

$$-2\mathrm{div}\big(\mu D(\vec u)\big) - \nabla(\lambda \mathrm{div}\vec u) = 0, \tag{4.59}$$

$$C_v\big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho\vec u\theta)\big) + r\varrho\theta\mathrm{div}\vec u - \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) =$$

$$2\mu D(\vec u) : D(\vec u) + \lambda|\mathrm{div}\vec u|^2 + 2\eta_1|\mathrm{curl}\vec B^*|^2 + 2\gamma^2\eta_2|\mathrm{curl}\vec D^*|^2, \tag{4.60}$$

$$\partial_t(\varrho\vec B^*) - \mathrm{curl}(\varrho\vec u \wedge \vec B^*) + \gamma^2\mathrm{curl}\vec D^* + 2\mathrm{curl}(\eta_1\mathrm{curl}\vec B^*) = 0, \tag{4.61}$$

$$\partial_t(\varrho\vec D^*) - \mathrm{curl}(\varrho\vec u \wedge \vec D^*) - \mathrm{curl}\vec B^* + 2\mathrm{curl}(\eta_2\mathrm{curl}\vec D^*) = 0, \tag{4.62}$$

$$\mathrm{div}(\varrho\vec B^*) = \mathrm{div}(\varrho\vec D^*) = 0. \tag{4.63}$$

The coefficients λ and μ satisfy the conditions given before and we consider η_1 and η_2 such that

$$\eta_i(s) = \mu(s) + c_i, \ \forall s > 0, \ i = 1, 2.$$

Moreover, we add the initial conditions for $\vec D$:

$$\vec D|_{t=0} = \vec D_0, \quad \mathrm{div}\vec D_0 = 0, \quad \frac{|\vec D_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 = 0\}.$$

4.8.1. Temperature equations

Just replacing $\tilde E$ and $\tilde H$ respectively by $\hat E = E + 2\gamma^2/\varrho^2 + |\vec B^*|^2/2 + \gamma^2|\vec D^*|^2/2$ and $\hat H = H - 2\gamma^2/\varrho^2 + |\vec B^*|^2/2 + \gamma^2|\vec D^*|^2/2$, we get the following equivalent formulations

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}(\varrho\vec u H) = \mathrm{div}(\delta\cdot\vec u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + 2\eta_1|\mathrm{curl}\vec B^*|^2 + 2\gamma^2\eta_2|\mathrm{curl}\vec D^*|^2$$
$$+\nabla(\gamma^2/\varrho)\cdot\vec u + \mathrm{div}(\varrho\vec B^*\otimes\vec B^*)\cdot\vec u + \gamma^2\mathrm{div}(\varrho\vec D^*\otimes\vec D^*)\cdot\vec u, \tag{4.64}$$

$$\partial_t(\varrho\hat E) + \mathrm{div}(\varrho\vec u\hat H) = \mathrm{div}(\delta\cdot\vec u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) + 2\mathrm{div}(\eta_1\mathrm{curl}\vec B^*\wedge\vec B^*)$$
$$+\mathrm{div}\big(\varrho(\vec u\wedge\vec B^*)\wedge\vec B^*\big) + \gamma^2\mathrm{div}(\eta_2\mathrm{curl}\vec D^*\wedge\vec D^*) + 2\gamma^2\mathrm{div}\big(\varrho(\vec u\wedge\vec D^*)\wedge\vec D^*\big), \tag{4.65}$$

$$\theta\big(\partial_t(\varrho s) + \mathrm{div}(\varrho s\vec u)\big) = 2\mu D(\vec u) : D(\vec u) + \lambda|\mathrm{div}\vec u|^2 + \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta)$$
$$+2\eta_1|\mathrm{curl}\vec B^*|^2 + 2\gamma^2\eta_2|\mathrm{curl}\vec D^*|^2. \tag{4.66}$$

4.8.2. Energy and BD entropy

The first things we need are the estimates of section 4.4.
▷ Integrating (4.66):

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\theta}\Big(2\mu(\varrho)S(\vec u) : S(\vec u) + \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\mu(\varrho)\big)|\mathrm{div}\vec u|^2\Big) + \int_0^t\int_\Omega \kappa(\varrho,\theta)\frac{|\nabla\theta|^2}{\theta^2}$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega \frac{\eta_1(\varrho)}{\theta}|\mathrm{curl}\vec B^*|^2 + 2\gamma^2\int_0^t\int_\Omega \frac{\eta_2(\varrho)}{\theta}|\mathrm{curl}\vec D^*|^2 \le \int_\Omega \big(\varrho s(t,\cdot) + \varrho_0(s_0)_-\big). \tag{4.67}$$

▷ Integrating (4.65):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho|\vec{u}|^2 + \varrho|\vec{B}^*|^2 + \gamma^2\varrho|\vec{D}^*|^2 + 2C_v\varrho\theta + 2\varrho e_c(\varrho) + \frac{4\gamma^2}{\varrho}\Big) = 0, \tag{4.68}$$

▷ Multiplying (4.59) by $\vec{u}$ and summing with (4.61)$\times\vec{B}^*$ and (4.62)$\times\gamma^2\vec{D}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho|\vec{u}|^2 + \varrho|\vec{B}^*|^2 + \gamma^2\varrho|\vec{D}^*|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) + \frac{4\gamma^2}{\varrho}\Big) + 2\int_\Omega \mu(\varrho)S(\vec{u}) : S(\vec{u})\\ + \int_\Omega \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\mu(\varrho)\big)|\mathrm{div}\vec{u}|^2 + 2\int_\Omega \eta_1(\varrho)|\mathrm{curl}\vec{B}^*|^2 + 2\gamma^2\int_\Omega \eta_2(\varrho)|\mathrm{curl}\vec{D}^*|^2\\ = \int_\Omega r\varrho\theta\mathrm{div}\vec{u},\end{aligned} \tag{4.69}$$

Following what is done in the proof of (4.26), we also get:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho\Big|\vec{u} + 2\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}\Big|^2 + \varrho|\vec{B}^*|^2 + \gamma^2\varrho|\vec{D}^*|^2 + 2\varrho e_c(\varrho) + \frac{4\gamma^2}{\varrho}\Big)\\ +2\int_\Omega \mu(\varrho)A(\vec{u}) : A(\vec{u}) + 2\int_\Omega \mu(\varrho)\tilde{S}(\vec{B}^*) : \tilde{S}(\vec{B}^*) + 2\gamma^2\int_\Omega \mu(\varrho)\tilde{S}(\vec{D}^*) : \tilde{S}(\vec{D}^*)\\ + \int_\Omega \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\mu(\varrho)\big)|\mathrm{div}\vec{B}^*|^2 + \gamma^2\int_\Omega \big(\lambda(\varrho) + \frac{2}{3}\mu(\varrho)\big)|\mathrm{div}\vec{D}^*|^2\\ +2\gamma^2\int_\Omega \mu'(\varrho)\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho^3} + 2\int_\Omega \frac{r\theta\mu'(\varrho)}{\varrho}|\nabla\varrho|^2 + 2c_1\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{B}^*|^2 + 2c_1\gamma^2\int_\Omega |\mathrm{curl}\vec{D}^*|^2 =\\ -2\int_\Omega \mu'(\varrho)p_c'(\varrho)\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} + \int_\Omega r\varrho\theta\mathrm{div}\vec{u} - 2\int_\Omega r\mu'(\varrho)\nabla\theta\cdot\nabla\varrho.\end{aligned} \tag{4.70}$$

4.8.3. Stability

From section 4.8.2, we conclude that everything said in the first part still right for the ABI model because the same estimates hold and $\vec{D}$ satisfy the same properties as $\vec{B}$ so we already know how to deal with. Nevertheless, we have to be sure that we can also pass to the weak limit in the term $\nabla(1/\varrho)$ but it is clear thanks to (4.51). To conclude a similar result as theorem 4.2 holds for the ABI model given by (4.58)–(4.63), with the initial conditions (4.6)–(4.10) completed with the ones of $\vec{D}$ of course copying those of $\vec{B}$.

References

[4.1] Y. Brenier, Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **172**, 65–91, (2004).

[4.2] Y. Brenier, W.A. Yong, Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism. *J. Math. Phys.* 46, no. 6, (2005).

[4.3] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no.1, 57–90, (2007).

[4.4] D. Bresch, B. Desjardins, Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressibles complètes avec conduction thermique. *C. R. Acad. Sci.,* Paris, Section mathématiques vol.343, issue 3, 219–224, (2006).

[4.5] D. Bresch, B. Desjardins, G. Métivier, Recent mathematical results and open problems about Shallow Water equations. *Analysis and Simulation of Fluid Dynamics in the series Advances in Mathematical Fluid Mechanics (eds C. Calgero, J.–F. Coulombel, T. Goudon),* (2006).

[4.6] D. Bresch, B. Desjardins, On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Maths pures et appliquées,* **86**, 362–368, (2006).

[4.7] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Maths pures et appliquées,* (9) 87, no. 2, 227–235, (2007).

[4.8] E. Feireisl, *Mathematics of viscous, compressible, and heat conducting fluids.* Nonlinear partial differential equations and related analysis, 133–151, Contemp. Math., 371, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[4.9] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.1,* Oxford University Press, (1996).

[4.10] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.2,* Oxford University Press, (1998).

[4.11] A. Mellet, A. Vasseur, On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. partial differential equations,* 32, no. 1-3, 431–452, (2007).

[4.12] Y.J. Peng, J. Ruiz, Two limit cases of Born-Infeld equations. *Submitted,* (2006).

Chapter V

Limit of complete ABI model with viscosity and temperature

Abstract

We study the limit $\gamma \to +\infty$ in the augmented version of the Born-Infeld model in its general form considered for viscous and temperature dependent fluids. The formal limit leads us to the linear Maxwell equations and we are here interested in showing this convergence of course using what we already know about these kind of density dependent models, results initially developed by D. Bresch and B. Desjardins and recently adapted to the Born-Infeld case.

5.1. The γ-Augmented Born-Infeld model

5.1.1. The γ-ABI system

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}\big(\varrho u \otimes u - \varrho B^* \otimes B^* - \gamma^2 \varrho D^* \otimes D^*\big) - \nabla\big(P - \gamma^2/\varrho\big)$$
$$-2\mathrm{div}\big(\mu D(u)\big) - \nabla(\lambda \mathrm{div} u) = 0,$$

$$C_v\big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho u\theta)\big) + r\varrho\theta\mathrm{div}u - \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) =$$
$$2\mu D(u) : D(u) + \lambda|\mathrm{div}u|^2 + 2\eta_1|\mathrm{curl}B^*|^2 + 2\gamma^2\eta_2|\mathrm{curl}D^*|^2,$$

$$\partial_t(\varrho B^*) - \mathrm{curl}(\varrho u \wedge B^*) + \gamma^2\mathrm{curl}D^* + 2\mathrm{curl}(\eta_1\mathrm{curl}B^*) = 0,$$
$$\partial_t(\varrho D^*) - \mathrm{curl}(\varrho u \wedge D^*) - \mathrm{curl}B^* + 2\mathrm{curl}(\eta_2\mathrm{curl}D^*) = 0,$$
$$\mathrm{div}(\varrho B^*) = \mathrm{div}(\varrho D^*) = 0,$$

where the pressure term is given by the expression $P = p(\varrho,\theta) + p_c(\varrho)$, with $p(\varrho,\theta) = r\varrho\theta$. ϱ is the density of the fluid, u its velocity, θ is the temperature, B and D respectively the magnetic field and the electric induction. (We have noted $B^* = B/\varrho$ and $D^* = D/\varrho$).

5.1.1. Assumptions

First of all, the functions λ and μ are supposed to be respectively $C^0(\mathbb{R}_+)$ and $C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$ and satisfy

$$\forall s > 0, \ \lambda(s) = 2(s\mu'(s) - \mu(s)). \tag{5.1}$$

We also suppose that $\mu(0) = 0$, that there exists positive constants c_0, c_1, A and $m > 1$, $\frac{2}{3} < n < 1$ such that

$$\forall s < A, \ \mu(s) \geq c_0 s^n, \ 3\lambda(s) + 2\mu(s) \geq c_0 s^n, \tag{5.2}$$

$$\forall s \geq A, \ c_1 s^m \leq \mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m, \ c_1 s^m \leq 3\lambda(s) + 2\mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m. \tag{5.3}$$

The diffusive coefficient η is also related to the viscosity μ by

$$\forall s > 0, \ \eta_i(s) = \mu(s) + d_i, \ d_i \geq 0, \ i = 1, 2. \tag{5.4}$$

Next, the thermal conductivity coefficient is assumed to satisfy

$$\kappa(\varrho, \theta) = \kappa_0(\varrho, \theta)(\varrho + 1)(\theta^a + 1), \tag{5.5}$$

where $a \geq 2$ and κ_0 is a $C^0(\mathbb{R}_+^2)$ function such that

$$\exists C > 0 \ ; \quad C \leq \kappa_0(s_1, s_2) \leq \frac{1}{C}, \quad \forall s_1 > 0, \forall s_2 > 0. \tag{5.6}$$

The cold pressure p_c is related to the internal energy e_c through the relation

$$p_c(\varrho) = \varrho^2 e_c'(\varrho), \tag{5.7}$$

and must respect all the following constraints :
$\exists \varrho_*, \tau_* > 0, \ k, l > 1, \ C_*, C_*', C_{**}, C_{**}' > 0$ such that

$$\forall \varrho \in (0, \varrho_*), \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*} \leq p_c'(\varrho) \leq C_* \varrho^{-l-1}, \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*'} \leq e_c(\varrho) \leq C_*' \varrho^{-l-1}, \tag{5.8}$$

$$\forall \varrho > \varrho_*, \quad -\frac{1}{\tau_*}\mu'(\varrho) \leq p_c'(\varrho) \leq C_{**} \varrho^{k-1}, \quad 0 \leq e_c(\varrho) \leq C_{**}' \varrho^{k-1}, \tag{5.9}$$

where $l \geq \frac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ et $k \leq \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{5(l+1) - 6n}{l+1-n}$.

5.1.2. Re-scaling

A new position of this model can be to consider a small velocity and to balance weight of B and D, so let's introduce a constant $\alpha \in [0, 1)$ for the following scaling:

$$\varrho \to \gamma \varrho_\gamma, \quad u \to \gamma^{2(\alpha-1)} u_\gamma, \quad \theta \to \gamma^{2(\alpha-1)} \theta_\gamma, \quad B \to \gamma^\alpha B_\gamma, \quad D \to \gamma^{\alpha-1} D_\gamma.$$

For viscosity and resistivity coefficients, we choose

$$\mu \to \gamma\mu_\gamma, \quad \kappa \to \gamma\kappa_\gamma, \quad \eta \to \gamma^{2\alpha-1}\eta_\gamma,$$

so that relation (5.4) gives

$$\forall s > 0,\ \varepsilon\eta_{\gamma,i}(s) = \mu_\gamma(s) + \frac{d_i}{\gamma},\ d_i \geq 0,\ i = 1, 2.$$

The last coefficient λ is also rescaled through its relation to μ. We finally define a new cold pressure $p_{c,\gamma}$ by the relation

$$p_c(\varrho) = \gamma^{2\alpha-1} p_{c,\gamma}(\varrho_\gamma).$$

Noting $\varepsilon = \gamma^{2(\alpha-1)}$ the new unknowns depending on γ (or ε) are solutions of the problem which now writes as

$$\partial_t\varrho_\gamma + \varepsilon\text{div}(\varrho_\gamma u_\gamma) = 0, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\partial_t(\varrho_\gamma u_\gamma) + \varepsilon\text{div}\big(\varepsilon\varrho_\gamma u_\gamma \otimes u_\gamma - \varrho_\gamma B^*_\gamma \otimes B^*_\gamma - \varrho_\gamma D^*_\gamma \otimes D^*_\gamma\big) - \nabla\big(\varepsilon P_\gamma - 1/\varrho_\gamma\big)\\ -2\varepsilon\text{div}\big(\mu_\gamma D(u_\gamma)\big) - \varepsilon\nabla(\lambda_\gamma \text{div} u_\gamma) = 0,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}C_v\big(\partial_t(\varrho_\gamma\theta_\gamma) + \varepsilon\text{div}(\varrho_\gamma u_\gamma\theta_\gamma)\big) + \varepsilon r\varrho_\gamma\theta_\gamma\text{div}u_\gamma - \text{div}(\kappa\nabla\theta_\gamma) =\\ 2\varepsilon\mu_\gamma D(u_\gamma) : D(u_\gamma) + \varepsilon\lambda_\gamma|\text{div}u_\gamma|^2 + 2\varepsilon\eta_{\gamma,1}|\text{curl}B^*_\gamma|^2 + 2\varepsilon\eta_{\gamma,2}|\text{curl}D^*_\gamma|^2,\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\partial_t(\varrho_\gamma B^*_\gamma) - \varepsilon\text{curl}(\varrho_\gamma u_\gamma \wedge B^*_\gamma) + \text{curl}D^*_\gamma + 2\varepsilon\text{curl}(\eta_{\gamma,1}\text{curl}B^*_\gamma) = 0, \tag{5.13}$$

$$\partial_t(\varrho_\gamma D^*_\gamma) - \varepsilon\text{curl}(\varrho_\gamma u_\gamma \wedge D^*_\gamma) - \text{curl}B^*_\gamma + 2\varepsilon\text{curl}(\eta_{\gamma,2}\text{curl}D^*_\gamma) = 0, \tag{5.14}$$

$$\text{div}(\varrho_\gamma B^*_\gamma) = \text{div}(\varrho_\gamma D^*_\gamma) = 0. \tag{5.15}$$

The formal limit $\gamma \to +\infty$ leads to a constant density and a vanishing velocity so that we finally get the only dependence between magnetic and electric influences. The temperature is not coupled with other quantities.

5.1.3. Temperature equations

Temperature dependence can once more be expressed by different relations that we are going to give here after some notations.

$$\delta_\gamma = 2\mu_\gamma D(u_\gamma) + \lambda_\gamma \text{div}u_\gamma \mathbf{I},$$

$$e_\gamma = C_v\theta_\gamma + e_{c,\gamma}(\varrho_\gamma), \quad \hat{E}_\gamma = e_\gamma + \varepsilon|u_\gamma|^2/2 + |B^*_\gamma|^2/2 + |D^*_\gamma|^2/2 + 2/\varrho^2_\gamma,$$

$$h_\gamma = e_\gamma + P_\gamma/\varrho_\gamma, \quad \hat{H}_\gamma = h_\gamma + \varepsilon|u_\gamma|^2/2 + |B^*_\gamma|^2/2 + |D^*_\gamma|^2/2 - 2/\varrho^2_\gamma,$$

$$\phi_\gamma(\varrho_\gamma) = \mu_\gamma(\varrho_\gamma)/\varrho_\gamma, \quad \gamma\varphi'_\gamma(\varrho_\gamma) = \mu'_\gamma(\varrho_\gamma)/\varrho_\gamma.$$

A useful, because conservative, form can be obtained by adding (5.12), (5.11) multiplied by u, (5.13) by B^* and (5.14) by D^*:

$$\partial_t(\varrho_\gamma \hat{E}_\gamma) + \varepsilon \mathrm{div}(\varrho_\gamma u_\gamma \hat{H}_\gamma) = \varepsilon \mathrm{div}(\delta_\gamma \cdot u_\gamma) + \mathrm{div}(\kappa_\gamma \nabla\theta_\gamma) + 2\varepsilon \mathrm{div}(\eta_{\gamma,1} \mathrm{curl} B^*_\gamma \wedge B^*_\gamma)$$

$$+\varepsilon \mathrm{div}\big(\varrho_\gamma(u_\gamma \wedge B^*_\gamma) \wedge B^*_\gamma\big) + 2\varepsilon \mathrm{div}(\eta_{\gamma,2} \mathrm{curl} D^*_\gamma \wedge D^*_\gamma) + \varepsilon \mathrm{div}\big(\varrho_\gamma(u_\gamma \wedge D^*_\gamma) \wedge D^*_\gamma\big), \quad (5.16)$$

or introducing the entropy $s = C_v \log(\theta/\varrho^\Gamma)$,

$$\theta_\gamma\big(\partial_t(\varrho_\gamma s_\gamma) + \varepsilon \mathrm{div}(\varrho_\gamma s_\gamma u_\gamma)\big) = 2\varepsilon\mu_\gamma D(u_\gamma) : D(u_\gamma) + \varepsilon\lambda_\gamma |\mathrm{div} u_\gamma|^2 + \mathrm{div}(\kappa_\gamma \nabla\theta_\gamma)$$

$$+2\varepsilon\eta_{\gamma,1}|\mathrm{curl} B^*_\gamma|^2 + 2\varepsilon\eta_{\gamma,2}|\mathrm{curl} D^*_\gamma|^2. \quad (5.17)$$

5.2. Limit $\gamma \to +\infty$

5.2.1. Energies and BD entropy

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\varepsilon}{\theta_\gamma}\Big(2\mu_\gamma(\varrho_\gamma) S(u_\gamma) : S(u_\gamma) + \big(\lambda_\gamma(\varrho_\gamma) + \frac{2}{3}\mu_\gamma(\varrho_\gamma)\big)|\mathrm{div} u_\gamma|^2\Big)$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega \kappa_\gamma(\varrho_\gamma, \theta_\gamma) \frac{|\nabla\theta_\gamma|^2}{\theta_\gamma^2} + 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \frac{\eta_{\gamma,1}(\varrho_\gamma)}{\theta_\gamma} |\mathrm{curl} B^*_\gamma|^2 \quad (5.18)$$

$$+2 \int_0^t \int_\Omega \frac{\eta_{\gamma,2}(\varrho_\gamma)}{\theta_\gamma} |\mathrm{curl} D^*_\gamma|^2 \leq \int_\Omega \big(\varrho_\gamma s_\gamma(t,\cdot) + \varrho_{0,\gamma}(s_{0,\gamma})_-\big),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varepsilon\varrho_\gamma|u_\gamma|^2 + \varrho_\gamma|B^*_\gamma|^2 + \varrho_\gamma|D^*_\gamma|^2 + 2C_v\varrho_\gamma\theta_\gamma + 2\varrho_\gamma e_{c,\gamma}(\varrho_\gamma) + \frac{4}{\varrho_\gamma}\Big) = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varepsilon\varrho_\gamma|u_\gamma|^2 + \varrho_\gamma|B^*_\gamma|^2 + \varrho_\gamma|D^*_\gamma|^2 + 2\varrho_\gamma e_{c,\gamma}(\varrho_\gamma) + \frac{4}{\varrho_\gamma}\Big)$$

$$+2\varepsilon \int_\Omega \mu_\gamma(\varrho_\gamma) S(u_\gamma) : S(u_\gamma) + \varepsilon \int_\Omega \big(\lambda_\gamma(\varrho_\gamma) + \frac{2}{3}\mu_\gamma(\varrho_\gamma)\big)|\mathrm{div} u_\gamma|^2 \quad (5.20)$$

$$+2\varepsilon \int_\Omega \eta_{\gamma,1}(\varrho_\gamma)|\mathrm{curl} B^*_\gamma|^2 + 2\varepsilon \int_\Omega \eta_{\gamma,2}(\varrho_\gamma)|\mathrm{curl} D^*_\gamma|^2 = \varepsilon \int_\Omega r\varrho_\gamma\theta_\gamma \mathrm{div} u_\gamma,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_\gamma\Big|\sqrt{\varepsilon}u_\gamma + 2\frac{\nabla\mu_\gamma(\varrho_\gamma)}{\varrho_\gamma}\Big|^2 + \varrho_\gamma|B^*_\gamma|^2 + \varrho_\gamma|D^*_\gamma|^2 + 2\varrho_\gamma e_{c,\gamma}(\varrho_\gamma) + \frac{4}{\varrho_\gamma}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+2\varepsilon\int_\Omega \mu_\gamma(\varrho_\gamma)A(u_\gamma):A(u_\gamma)+\frac{2c_1}{\gamma}\int_\Omega|\mathrm{curl}B^*_\gamma|^2+\frac{2c_2}{\gamma}\int_\Omega|\mathrm{curl}D^*_\gamma|^2\\
&+2\int_\Omega \mu_\gamma(\varrho_\gamma)\tilde S(B^*_\gamma):\tilde S(B^*_\gamma)+\int_\Omega\big(\lambda_\gamma(\varrho_\gamma)+\frac{2}{3}\mu_\gamma(\varrho_\gamma)\big)|\mathrm{div}B^*_\gamma|^2\\
&+2\int_\Omega \mu_\gamma(\varrho_\gamma)\tilde S(D^*_\gamma):\tilde S(D^*_\gamma)+\int_\Omega\big(\lambda_\gamma(\varrho_\gamma)+\frac{2}{3}\mu_\gamma(\varrho_\gamma)\big)|\mathrm{div}D^*_\gamma|^2 \qquad (5.21)\\
&+\frac{2}{\varepsilon}\int_\Omega\mu'_\gamma(\varrho_\gamma)\frac{|\nabla\varrho_\gamma|^2}{\varrho_\gamma^3}+2\int_\Omega\frac{r\theta_\gamma\mu'_\gamma(\varrho_\gamma)}{\varrho_\gamma}|\nabla\varrho_\gamma|^2=\\
&-2\int_\Omega\mu'_\gamma(\varrho_\gamma)p'_{c,\gamma}(\varrho_\gamma)\frac{|\nabla\varrho_\gamma|^2}{\varrho_\gamma}+\varepsilon\int_\Omega r\varrho_\gamma\theta_\gamma\mathrm{div}u_\gamma-2\int_\Omega r\mu'_\gamma(\varrho_\gamma)\nabla\theta_\gamma\cdot\nabla\varrho_\gamma.
\end{aligned}
$$

Proofs: (5.18) is obtained by integrating (5.17) divided by θ_γ, (5.19) by integrating (5.16), (5.20) by integrating (5.11)$\times u_\gamma$+(5.13)$\times B^*_\gamma$+(5.14)$\times D^*_\gamma$. To get (5.21), we first give a modified form of (5.11) using (5.10) and noting $v_\gamma=\frac{2}{\varepsilon}\frac{\nabla\mu_\gamma(\varrho_\gamma)}{\varrho_\gamma}$:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\partial_t\big(\varrho_\gamma(u_\gamma+v_\gamma)\big)+\varepsilon\mathrm{div}\big(\varepsilon\varrho_\gamma u_\gamma\otimes(u_\gamma+v_\gamma)-\varrho_\gamma B^*_\gamma\otimes B^*_\gamma-\varrho_\gamma D^*_\gamma\otimes D^*_\gamma\big)\\
&\qquad-\nabla\big(\varepsilon P_\gamma-1/\varrho_\gamma\big)-2\varepsilon\mathrm{div}\big(\mu_\gamma A(u_\gamma)\big)=0, \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

and then integrate (5.22)$\times(u_\gamma+v_\gamma)$+(5.13)$\times B^*_\gamma$+(5.14)$\times D^*_\gamma$. See [5.12] for the complete proof.

5.2.2. Estimates

Using again the strategies proposed in [5.3] and recalled in [5.12], that is to say by majoring the term of right hand sides and concluding by a Gronwall lemma, we then deduce the following bounds uniformly in ε:

$$
\begin{gathered}
\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varrho_\gamma}u_\gamma \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2),\\
\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu_\gamma}\nabla u_\gamma \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2),\\
\sqrt{\varrho_\gamma}B^*_\gamma \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2),\\
\sqrt{\mu_\gamma}\nabla B^*_\gamma \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2),\\
\sqrt{\varrho_\gamma}D^*_\gamma \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2),\\
\sqrt{\mu_\gamma}\nabla D^*_\gamma \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2),\\
\varrho_\gamma\theta_\gamma \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^1),\\
\varepsilon^\beta\mathrm{curl}B^*_\gamma \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2),\\
\varrho_\gamma e_{c,\gamma}(\varrho_\gamma) \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^1),
\end{gathered}
$$

$$\varepsilon^\beta \mathrm{curl} D_\gamma^* \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2)$$
$$\varrho_\gamma^{-1} \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^1),$$
$$\sqrt{\kappa_\gamma}\frac{\nabla\theta_\gamma}{\theta_\gamma} \text{ bounded in } L^2(0,T;L^2),$$
$$\frac{\nabla\mu_\gamma(\varrho_\gamma)}{\sqrt{\varrho_\gamma}} \text{ bounded in } L^\infty(0,T;L^2),$$

where we have noted $\beta = \frac{1}{4(1-\alpha)} > 0$.

5.2.3. Convergences

Here are the most important ones but we can easily remark that all these estimates are mostly the same obtained in [5.12] for the unknowns ϱ_γ, B_γ^*, D_γ^*, θ_γ but $\sqrt{\varepsilon}u_\gamma$. That is why we then deduce many bounds and convergences picked up from [5.12]. First, ϱ_γ strongly converges to $\overline{\varrho}$ in $C([0,T];L^q_{loc}(\Omega))$, for all $q < 6m-3$, with $m > 1$ (for that point we may look at the complete proof given in [5.3]) and B_γ^*, D_γ^* and $\sqrt{\varepsilon}u_\gamma$ respectively weakly converge to some $\overline{B^*}$, $\overline{D^*}$, $\overline{u}$ in $L^{q_1}(0,T;W^{1,q_2}_{loc}(\Omega))$, where $q_1 > 5/3$ and $q_2 > 15/8$.
Taking advantage of equations (5.11), (5.13) and (5.14) to get required bounds on time derivatives, we can also show the following strong convergences:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varrho_\gamma u_\gamma &\to 0 \ \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,r}),\ \forall p < +\infty,\ \forall r < 3\\
\varrho_\gamma B_\gamma^* &\to \overline{\varrho}\overline{B^*} \ \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,r}),\ \forall p < +\infty,\ \forall r < 3\\
\varrho_\gamma D_\gamma^* &\to \overline{\varrho}\overline{D^*} \ \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,r}),\ \forall p < +\infty,\ \forall r < 3
\end{aligned}$$

From estimates given in subsection 5.1.3 together with the strong convergence of the density and the properties of functions μ_γ, λ_γ and η_γ we also get the weak convergences

$$\varepsilon\mu_\gamma\nabla u_\gamma \rightharpoonup 0,\quad \sqrt{\varepsilon}\lambda_\gamma \mathrm{div} u_\gamma \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^{5/3}(0,T;L^{10/7}(\Omega)),$$
$$\varepsilon\eta_{1,\gamma}\mathrm{curl}B_\gamma^* \rightharpoonup 0,\quad \varepsilon\eta_{2,\gamma}\mathrm{curl}D_\gamma^* \rightharpoonup 0 \ \text{ in } L^{5/3}(0,T;L^{10/7}(\Omega)),$$

Finally, let's see what becomes the pressure term. Thanks to the strong convergence of the density, we can insure that $\varepsilon p_{c,\gamma}(\varrho_\gamma)$ weakly converges to 0 in $L^\infty(0,T;L^{(6m-3)/k}(\Omega))$. On the other hand, we get the weak convergence of $\varepsilon\varrho_\gamma\theta_\gamma$ to 0 in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$ through the bounds θ_γ in $L^2(0,T;L^6(\Omega))$ and ϱ_γ in $L^\infty(0,T;L^{6m-3}(\Omega))$, coming from [5.3]. To finish, the strong convergence of $\varrho_\gamma^{-1/2}$ to $\varrho^{-1/2}$ in $L^\infty(0,T;L^q_{loc}(\Omega))$, for all $q < 6$, implies that ϱ_γ^{-1} converges to some ϱ^{-1} in the sense of distributions so that we can now recapitulate the limit form we obtain:

$$\partial_t\overline{\varrho} = 0,\ \nabla\Big(\frac{1}{\overline{\varrho}}\Big) = 0,$$

and it follows that $\overline{\varrho}$ is a constant and that the velocity and the temperature are not coupled variables any more, we are just going to consider the B-D-coupling in the following system, noting $\overline{B} = \overline{\varrho}\overline{B^*}$ and $\overline{D} = \overline{\varrho}\overline{D^*}$,

$$\partial_t\overline{B} + \mathrm{curl}\overline{D} = 0,\quad \mathrm{div}\overline{B} = 0,$$
$$\partial_t\overline{D} - \mathrm{curl}\overline{B} = 0,\quad \mathrm{div}\overline{D} = 0,$$

and we of course recognize the so-called linear Maxwell equations!

References

[5.1] Y. Brenier, Hydrodynamics structure of the augmented Born-Infeld equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **172**, 65–91, (2004).

[5.2] Y. Brenier, W.A. Yong, Derivation of particle, string and membrane motions from the Born-Infeld electromagnetism. *J. Math. Phys.* 46, no. 6, (2005).

[5.3] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no.1, 57–90, (2007).

[5.4] D. Bresch, B. Desjardins, Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressibles complètes avec conduction thermique. *C. R. Acad. Sci., Paris, Section mathématiques.* vol.343, issue 3, 219–224, (2006).

[5.5] D. Bresch, B. Desjardins, G. Métivier, Recent mathematical results and open problems about Shallow Water equations. *Analysis and Simulation of Fluid Dynamics in the series Advances in Mathematical Fluid Mechanics (eds C. Calgero, J.–F. Coulombel, T. Goudon),* (2006).

[5.6] D. Bresch, B. Desjardins, On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Maths pures et appliquées,* **86**, 362-368, (2006).

[5.7] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Maths pures et appliquées,* (9) 87, no. 2, 227–235, (2007).

[5.8] E. Feireisl, *Mathematics of viscous, compressible, and heat conducting fluids.* Nonlinear partial differential equations and related analysis, 133–151, Contemp. Math., 371, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[5.9] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.1,* Oxford University Press, (1996).

[5.10] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.2,* Oxford University Press, (1998).

[5.11] A. Mellet, A. Vasseur, On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. partial differential equations,* 32, no. 1-3, 431–452, (2007).

[5.12] R. Sart, A viscous Augmented Born-Infeld model for magnetohydrodynamic flows. *Submitted,* (2007).

Partie III

Modèles capillaires

Chapitre VI

Introduction sur les modèles d'interfaces bi-fluides

6.1. Equation sur l'interface

Plaçons nous dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$, dans lequel s'écoulent deux fluides non miscibles. A un instant t, on note $\Omega_1(t) \subset \Omega$ la partie de Ω contenant le fluide 1 et $\Omega_2(t)$ celle qui contient le fluide 2, on a ainsi $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1(t)} \cup \overline{\Omega_2(t)}$. Ce que l'on appelle **interface**, c'est la frontière entre les deux fluides 1 et 2, on la note $\Gamma(t) = \partial\Omega_1(t) \cap \Omega_2(t)$.
L'interface est une surface que l'on peut paramétrer par

$$\Gamma(t) = \{x = F(\xi, t) \in \Omega \ ; \ \xi \in [0,1]^2\}.$$

Ainsi, la fonction F décrivant la position de l'interface est convecté par la vitesse u du fluide et on en déduit donc les relations :

$$\frac{dF}{dt}(\xi, t) = u(F(\xi, t), t),$$

$$F(\xi, 0) = F_0(\xi),$$

où F_0 est le paramétrage de l'interface au temps $t = 0$.
Dans les modélisations usuelles d'interfaces bi-fluides, on suppose que le champ de vitesse u est continu à la traversée de l'interface alors que les contraintes normales à la surface de contact entre les fluides sont, au contraire, discontinues. Ces hypothèses rendent compte des effets de tension de surface observables à l'interface et liés à sa forme. En effet, plus la courbure de l'interface est grande, plus la force qu'elle exerce, tendant à la rendre plane, est importante.
Notons σ_{tot} le tenseur des contraintes totales et $\mathbf{n}$ la normale unitaire à l'interface, choisie orientée de $\Omega_1(t)$ vers $\Omega_2(t)$. Les conditions décrites précédemment se traduisent par :

$$[u] = 0 \text{ sur } \Gamma(t) \times]0, T[,$$

$$[\sigma_{tot} \cdot \mathbf{n}] = \alpha\kappa\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma(t) \times]0, T[,$$

où $[\varphi] = \varphi|_{\Omega_1(t)} - \varphi|_{\Omega_2(t)}$ représente le saut à l'interface de la quantité φ. α est le coefficient de tension de surface et $\kappa(x, t)$ est la courbure de la surface à l'intant t.

6.2. Les interfaces raides et diffuses

6.2.1. Point de vue fluide-fluide

Le mouvement de chacun des deux fluides est décrit par les équations de Navier-Stokes. Si on note ϱ_i et u_i la densité et la vitesse du i-ème fluide pour $i \in \{1, 2\}$, on a les équations suivantes, dans $\Omega_i(t)\times]0, T[$:

$$\partial_t \varrho_i + \mathrm{div}(\varrho_i u_i) = 0, \tag{6.1}$$

$$\partial_t(\varrho_i u_i) + \mathrm{div}(\varrho_i u_i \otimes u_i) - \mathrm{div}\sigma_{tot} = \varrho_i f, \tag{6.2}$$

où $\sigma_{tot} = 2\mu_i D(u_i) + (\lambda_i \mathrm{div} u_i - p)\mathbf{I}$.
La résolution d'un problème aux limites dans la cas d'une vision séparée des deux fluides pose quelques difficultés. C'est pourquoi une autre description, que nous allons développer ensuite, semble intéressante, elle permet de considérer un système d'équations unique modélisant le mouvement du système {fluide 1,fluide 2} en tenant compte évidemment des forces de surface sur $\Gamma(t)$.

6.2.2. Point de vue global

Dans ce paragraphe, on va expliquer brièvement comment combiner les équations (6.1)–(6.2). On doit définir les grandeurs précédentes sur le domaine Ω tout entier. Introduisons une densité "globale" définie par

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_1 & \text{dans } \Omega_1(t) \\ \varrho_2 & \text{dans } \Omega_2(t) \end{cases}$$

et une fonction ϕ telle que

$$\phi(x,t) \begin{cases} = 0 & \text{si } x \in \Gamma(t) \\ > 0 & \text{si } x \in \Omega_1(t) \\ < 0 & \text{si } x \in \Omega_2(t) \end{cases} \tag{6.3}$$

de sorte que l'on peut aussi définir l'interface par

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega;\ \phi(x,t) = 0\}.$$

Considérons pour finir une extension $\tilde{\kappa}$ de la courbure κ au domaine Ω entier. Sous ces conditions, les équations (6.1) et (6.2) peuvent être remplacées dans Ω par :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0, \tag{6.4}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) - \mathrm{div}\sigma_{tot} + \alpha\tilde{\kappa}\delta(\phi)\nabla\phi = \varrho f. \tag{6.5}$$

Pour un système construit comme dans la sous-section précédente, les questions d'existence concernent maintenant les inconnues ϕ, u et p, les autres quantités (fonctions de la densité) s'exprimant en fonction de ϕ, par exemple,

$$\varrho = \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)H(\phi), \tag{6.6}$$

où H est la fonction de Heaviside définie pour presque tout $\phi \in \mathbb{R}$ par :

$$H(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.2.3. Régularisation

Pour étudier un modèle d'interface dite **raide**, c'est-à-dire présentée comme on vient de le voir pour un profil de densité discontinu, autrement dit pour une interface d'épaisseur nulle, on commence par régulariser et c'est ce dont nous allons parler maintenant.
La méthode couramment utilisée consiste à remplacer la masse de Dirac δ et la fonction de Heaviside H par des fonctions régulières approchées. On introduit alors un paramètre $\varepsilon > 0$ et on construit les fonctions δ_ε et H_ε qui tendent évidemment vers δ et H lorsque ε tend vers 0 :

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{\sin(\pi\phi/\varepsilon)}{\pi}\Big) & \text{si} \quad |\phi| \le \varepsilon \\ 1 & \text{si} \quad \phi > \varepsilon \end{cases}$$

$$\delta_\varepsilon(\phi) = \frac{dH_\varepsilon}{d\phi}(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}\big(1 + \cos(\pi\phi/\varepsilon)\big) & \text{si} \quad |\phi| \le \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |\phi| > \varepsilon \end{cases}$$

On considère donc implicitement des densités ϱ_ε régulières définies par

$$\varrho_\varepsilon(\phi) = \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)H_\varepsilon(\phi).$$

On caractérise ainsi une interface dite **diffuse** qui décrit la situation de deux fluides en contact avec une zone de mélange d'épaisseur 2ε où les fractions des fluides 1 et 2 sont données respectivement par

$$Fr_1(x,t) = 1 - H_\varepsilon\big(\phi(x,t)\big),$$

$$Fr_2(x,t) = H_\varepsilon\big(\phi(x,t)\big).$$

On utilise ainsi un modèle de fluides miscibles pour approcher un problème de fluides non miscibles.

6.3. Notion de paramètres d'ordre

La fonction ϕ introduite précédemment est appelée paramètre d'ordre. Plusieurs fonctions peuvent convenir, un exemple classique pour le cas des interfaces est le choix pour ϕ de la fonction distance signée à l'interface. En effet, la fonction distance signée vérifie (6.3). Le choix du paramètre d'ordre est directement lié à un problème de minimisation d'énergie pour une dynamique de fluide. Entre autres, **le modèle de Korteweg** correspond à une fonctionnelle d'énergie particulière.

6.3.1. Energie libre

Dans les descriptions des modèles bifluides, par exemple [6.5] ou , est mise en évidence une nouvelle énergie associée à une force de capillarité, liée à l'énergie libre de surface

$$\mathcal{E} = \int_\Omega |\nabla f|^2,$$

où f est la fonction spécifique d'énergie libre. Il est par exemple question de cette énergie dans les études relatives aux fonctionnelles choisies par Cahn-Hilliard, Allen-Cahn ou encore Mundford-Shah. Ces termes d'énergie conditionnent directement le modèle que l'on étudie.

6.3.2. Modèle de Korteweg

Pour la modélisation d'une interface entre deux fluides compressibles avec tension de surface, le terme d'énergie est :

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2} \int_\Omega |\nabla \varrho|^2,$$

où σ est le coefficient de tension de surface.
La force capillaire associée à cette énergie est $-\sigma\varrho\nabla\Delta\varrho$, on l'obtient par le calcul suivant :

$$\frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla\varrho|^2 = \sigma \int_\Omega \nabla\varrho \cdot \nabla(\partial_t \varrho) = -\sigma \int_\Omega \nabla\varrho \cdot \nabla \mathrm{div}(\varrho u) = -\sigma \int_\Omega \varrho\nabla\Delta\varrho \cdot u.$$

Cette remarque sous-entend donc de considérer l'équation de conservation de quantité de mouvement suivante :

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla P - 2\mathrm{div}\big(\varrho D(u)\big) = \sigma\varrho\nabla\Delta\varrho, \tag{6.7}$$

D.J. Korteweg fût le premier à introduire les effets de la capillarité dans les équations de Navier-Stokes en supposant un tenseur des contraintes dépendant non seulement de la densité mais aussi de son gradient. La forme la plus générale peut être donnée par

$$\big(\alpha\Delta\varrho + \beta|\nabla\varrho|^2\big)\mathbf{I} + \gamma\nabla^2\varrho + \delta\nabla\varrho \otimes \nabla\varrho.$$

Les travaux récents de D. Bresch, B. Desjardins et C.K. Lin, notamment [6.6] et [6.7], ont pour but de montrer que de tels modèles d'interface diffuse sont bien posés. D'autres auteurs se sont aussi penchés sur ces questions d'existence de solutions. Le problème du cas isotherme avec viscosités constantes reste ouvert, néanmoins on trouve dans la littérature quelques réponses. Par exemple, H. Hattori et D. Li sont les premiers à avoir justifié que le modèle complet non isotherme est bien posé pour des données initiales proches d'un état stable et montré existence en temps fini et unicité pour des données initiales grandes dans [6.12] et [6.13], résultats repris par R. Danchin et B. Desjardins dans [6.10] pour le cas isotherme. On peut aussi trouver des résultats pour le cas isotherme non visqueux dans [6.2] ou [6.4], mais pour poursuivre avec les modèles de fluides visqueux, indiquons que dans le cas plus général de viscosités dépendantes de la densité du fluide, le terme cité au-dessus doit être modifié pour conduire aux équations d'énergie adéquates. Plus précisément, si l'on se reporte aux modèles de la deuxième partie de ce mémoire pour les cas dépendant de la densité, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la modélisation d'interfaces peut s'écrire :

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla P - 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho)D(u)\big) + \nabla(\lambda(\varrho)\mathrm{div}u) = \sigma\varrho\nabla\big(\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)\big),$$

conduisant ainsi au terme d'énergie

$$\frac{\sigma}{2}\int_\Omega |\nabla\mu(\varrho)|^2.$$

C'est en fait une simple généralisation du cas $\mu(\varrho) = \varrho$ donné en (6.7). De plus, et il s'agit là d'un point essentiel en ce qui concerne la suite, le terme de capillarité proposé dans l'équation qui précède est alors compatible avec la formule BD, on insiste à nouveau sur le fait qu'elle est essentielle pour l'étude de cette catégorie de modèles. En plus des termes déjà connu de la formule BD, cette nouvelle énergie conduit également à des estimations supplémentaires sur la densité.

6.4. Etudes d'interfaces bi-fluides

6.4.1. Stabilité dans le cas magnétique en 2-D *(→ chapitre VII)*

En ce qui concerne les études du cas magnétique, ma première idée fût d'essayer de généraliser le théorème d'existence de D. BRESCH et B. DESJARDINS dont on a déjà parlé sur Navier-Stokes dans le cas dépendant en exploitant au maximum les estimations relativement confortables dont on disposait sur la densité. Cependant, je n'ai pas réussi à adapter la preuve, le principal problème étant de contrôler le terme magnétique

$$\int_\Omega \mathrm{rot}B \wedge B \cdot \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho}. \tag{6.8}$$

En effet, les équations d'énergie et BD ne donnent pas suffisamment d'information pour contrôler ce terme pour ce modèle MHD "classique". C'est pourquoi, d'ailleurs, ce résultat a plutôt été démontré pour le modèle décrit dans la deuxième partie à propos de la théorie de Born-Infeld. Néanmoins, pour un modèle d'interface comme on vient de décrire, offrant des estimations supplémentaires sur la densité, il est légitime de penser que c'est possible, et c'est ce dont nous allons parler maintenant.
Commençons par rappeler le modèle ainsi que les estimations intéressantes pour le terme (6.8). Les équations classiques du modèle MHD d'une interface entre deux fluides compressibles et visqueux sont les suivantes :

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho u) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho u \otimes u) + \nabla P - j \wedge B - \varrho \nabla\big(\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)\big) = 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho)D(u)\big) + \nabla(\lambda(\varrho)\mathrm{div} u),$$
$$\partial_t B - \mathrm{rot}(u \wedge B) + \mathrm{rot}\big(\eta(\varrho)j\big) = 0,$$
$$j = \mathrm{rot} B, \quad \mathrm{div} B = 0.$$

Sans entrer dans les détails puisque c'est l'objet du chapitre VII et que de nombreux points ressemblent à ceux du chapitre IV, mais simplement pour signaler ici le point crucial de cette étude, nous allons écrire l'inégalité qui permet de contrôler (6.8) :

$$\Big| \int_\Omega \mathrm{rot} B \wedge B \cdot \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho} \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\mathrm{rot} B|^2}{\varepsilon \varrho^2} + C\varepsilon\Big(1 + \|\Delta\mu(\varrho)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{rot} B\|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{6.9}$$

C'est ici que réside la condition nécessaire de se placer en dimension 2 car cette inégalité provient essentiellement du fait que l'inclusion $W^{1,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est continue. En dimension 3, cette inégalité n'est pas vérifiée et on ne peut donc pas, de cette façon, obtenir la même conclusion. Précisons un peu pour le cas de la dimension 2. Le premier terme intégral de (6.9) est ensuite compensé par un terme de l'équation d'énergie (dans le membre de gauche), précisément le terme relatif à la résistivité η du fluide, ce qui induit bien évidemment des conditions que l'on retrouvera dans le chapitre consacré à ce modèle. Les normes suivantes se grouperont également avec d'autres termes moyennant là aussi des conditions sur η ainsi que sur μ', en particulier celle d'être minorés par des constantes. Nous y reviendrons donc dans le chapitre suivant.

6.4.2. Instabilité de type Rayleigh-Taylor *(→ chapitre VIII)*

Comme nous l'avons dit très brièvement dans le chapitre introductif sur la MHD, les instabilités de type Rayleigh-Taylor intéressent particulièrement les expérimentateurs de fusion nucléaire. Ces instabilités sont des phénomènes qui limitent la rentabilité de la décharge énergétique tant convoitée dans les tokamaks. Les études de ces instabilités est essentielle afin d'essayer d'en éliminer les effets nuisibles, que ce soit pour la physique des plasmas ou d'autres domaines plus généraux de fluides compressibles ou incompressibles.

Les instabilités de type Rayleigh-Taylor sont facilement descriptibles. Elles apparaissent au niveau d'une interface entre deux fluides de densités différentes. On peut se faire une idée simple de ces phénomènes en s'imaginant par exemple un fluide lourd en contact avec un fluide plus léger, tous deux soumis à un champ gravitationnel. Ce système bi-fluide est instable dès lors que le fluide lourd est "au dessus" du fluide léger. L'instabilité est créée par la tendance de ce système à minimiser son énergie potentielle. En effet, le fluide lourd "tombe" sur le fluide léger, créant une zone de mélange. Cette perte d'énergie est bien entendu compensée par une création d'énergie cinétique lors de l'interpénétration des deux fluides. Les simulations de ces phénomènes montrent une dissymétrie à l'interface, le fluide léger pénètre moins loin dans le fluide lourd tout en formant des structures plus grandes, on parle de bulles de fluide léger et de pics de fluide lourd.
Malgré cette image très simpliste de ces phénomènes, il faut bien avoir à l'esprit qu'une multitude de facteurs peuvent influencer leur évolution. Les instabilités de type Rayleigh-Taylor sont très sensibles par exemple à la compressibilité, à la tension de surface et à la

viscosité pour ne citer que les effets directement liés aux travaux de ce mémoire. Il paraît donc essentiel, lorsque l'on étudie la stabilité d'un fluide, de pouvoir prédire l'évolution des instabilités selon les conditions dans lesquelles on se place.

Le chapitre VIII a pour but de mettre en évidence les effets de la capillarité sur les phénomènes d'instabilité que l'on vient de décrire. On considère dans ce chapitre un modèle d'interface entre deux fluides compressibles décrit par les équations

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0,$$

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \nu \mathrm{div}(\rho \nabla u) - \sigma \rho \nabla \Delta \rho + \nabla p = \rho g,$$

où l'on suppose une viscosité ν et une capillarité σ constantes.
Notre étude est constituée de deux parties. Dans une première partie, on montre comment l'inégalité d'énergie et la BD entropie permettent d'obtenir une stabilité de type exponentielle si l'on suppose être loin du vide et une stabilité de type monotone sinon. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons au taux de croissance en temps d'une instabilité de type Rayleigh-Taylor. Plus précisément, nous caractérisons l'influence de la tension de surface sur ce taux de croissance. Dans un cas particulier de limite faible nombre d'Atwood pour des profils de densité linéaires, nous retrouvons une expression connue dans le cadre incompressible.

Stabilité.
Considérons un état de réfèrence constant $(\overline{\rho}, 0)$. On montre après linéarisation et transformée de Laplace que le coefficient de croissance en temps est strictement négatif sous la condition

$$\frac{P'(\bar{\rho})L^2}{\bar{\rho}\sigma} \geq -1,$$

où P est la pression, σ le coefficient de surface et L la longueur correspondant au domaine $\Omega = (0, 2\pi L)^d$. Notons que le terme de pression n'est pas nécessairement croissant dans le cadre des modèles de type Korteweg. On obtient ainsi la stabilité linéaire de l'état de réfèrence en utilisant une simple estimation d'énergie.
En ce qui concerne la stabilité non linéaire de type exponentielle, on utilise l'inégalité d'énergie associée à la BD entropie afin de pouvoir appliquer un lemme de type Gronwall.

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \Big(\rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u} + \nu \nabla \log \rho|^2 + 2\Pi(\rho) + \sigma |\nabla \rho|^2 \Big)$$
$$\leq -\nu \int_\Omega \frac{P'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2 - \nu\sigma |\nabla\nabla\rho|^2 - \nu \int_\Omega \rho |\nabla \mathbf{u}|^2.$$

Taux de croissance.
On imagine une perturbation 2D du flot statique $(0, p^0, \varrho^0)$ associé à une vitesse nulle, satisfaisant $\nabla p^0 = \sigma \varrho^0 \nabla \Delta \varrho^0 + \varrho^0 g$.
La densité perturbée ϱ^1, la vitesse perturbée $\overline{u} = (u^1, 0, w^1)$ et la pression p^1 vérifient le système

$$\partial_t \rho^1 + \frac{d\rho^0}{dz} w^1 = 0,$$

$$\partial_t u^1 + \frac{1}{\rho^0}\partial_x p^1 = \sigma\partial_x^3\rho^1 + \sigma\partial_x\partial_z^2\rho^1 + \nu\partial_x^2 u^1 + \frac{\nu}{\rho^0}\partial_z(\rho^0\partial_z u^1),$$
$$\partial_t w^1 + \frac{1}{\rho^0}\partial_z p^1 = \sigma\partial_x^2\partial_z\rho^1 + \sigma\partial_z^3\rho^1 + \sigma\frac{\rho^1}{\rho^0}\frac{d^3\rho^0}{dz^3} - \frac{\rho^1}{\rho^0}g + \nu\partial_x^2 w^1 + \frac{\nu}{\rho^0}\partial_z(\rho^0\partial_z w^1),$$
$$\partial_x u^1 + \partial_z w^1 = 0.$$

On s'intéresse désormais aux solutions

$$\varphi(x,z,t) = \varphi(z)\exp(ikx + \gamma t),$$

où k représente le nombre d'onde et le but du travail décrit dans le chapitre VIII consiste à mettre en évidence l'ordre auquel intervient la tension de surface dans le développement asymptotique

$$\frac{gk}{\gamma^2} = \lambda_0 + k\lambda_1 + k^2\lambda_2 + ...$$

et donc son influence vis-à-vis de la croissance de l'instabilité représentée par le coefficient γ.
Les solutions que nous regardons satisfont les équations

$$\gamma\rho + \frac{d\rho^0}{dz}w = 0,$$
$$\gamma u + \frac{ik}{\rho^0}p = -ik^3\sigma\rho + ik\sigma\frac{d^2\rho}{dz^2} - \nu k^2 u + \frac{\nu}{\rho^0}\frac{d}{dz}(\rho^0\frac{d}{dz}u),$$
$$\gamma w + \frac{1}{\rho^0}\frac{dp}{dz} = -k^2\sigma\frac{d\rho}{dz} + \sigma\frac{d^3\rho}{dz^3} + \sigma\frac{\rho}{\rho^0}\frac{d^3\rho^0}{dz^3} - \frac{\rho}{\rho^0}g - \nu k^2 w + \frac{\nu}{\rho^0}\frac{d}{dz}(\rho^0\frac{d}{dz}w),$$
$$iku + \frac{dw}{dz} = 0,$$

que l'on réécrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\nu}{\gamma l^2}\frac{d^2}{dz^2}(\rho^0\frac{d^2}{dz^2}w) - \frac{d}{dz}\left[\left((1+\frac{2\nu\varepsilon^2}{\gamma\ell^2})\rho^0 + \frac{\sigma\varepsilon^2\overline{\rho}}{\gamma^2\ell^4}\left|\frac{d\rho^0}{dz}\right|^2\right)\frac{dw}{dz}\right]$$
$$+\varepsilon^2\left((1+\frac{\nu\varepsilon^2}{\gamma\ell^2})\rho^0 + \frac{\sigma\varepsilon^2\overline{\rho}}{\gamma^2\ell^4}\left|\frac{d\rho^0}{dz}\right|^2\right)w = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2\ell}\frac{d\rho^0}{dz}gw.$$

Le calcul des coefficients du développement asymptotique est assez long. On propose dans le chapitre VIII de le réaliser avec l'hypothèse supplémentaire de viscosité nulle ($\nu = 0$). P. CARLÈS et S. POPINET [6.8] ont étudié en 2002 l'instabilité de type Richtmyer-Meshkov version incompressible dans le cadre général avec viscosité non nulle. Ils mettent en évidence l'influence de la tension de surface et de la viscosité après un calcul d'une centaine de pages c'est pourquoi l'idée de compléter notre étude par la prise en compte d'une viscosité ν non nulle semble inaccessible. Toutefois, dans le cas que nous considérons, on parvient à l'égalité

$$\frac{\gamma^2}{gk} = A - \frac{T_s}{g(\rho_2+\rho_1)}k^2,$$

indiquant que la tension de surface intervient à l'ordre 3 dans le développement de $\frac{\gamma^2}{g}$.

Références bibliographiques

[6.1] D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler, Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 30, 139–165, (1998).

[6.2] S. Benzoni-Gavage, Linear stability of propagating phase boundaries in capillary fluids. *Physica D,* 155, (2001), 235–273.

[6.3] S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes, D. Jamet. Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces, *Interfaces Free Boundaries,* 7, 371–414 (2005).

[6.4] S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes. Well-posedness of one-dimensional Korteweg models, *Electronic Journal of Differential Equations,* 59, 1–35 (2006).

[6.5] D. Bresch, T. Colin, E. Grenier, B. Ribba, O. Saut,P. Singh, C. Verdier, Modèles avec paramètres d'ordre, level set et interface diffuse : application à la cancérologie. *ESAIM Proc.* (2006).

[6.6] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Comm. Partial Diff. Eqs,* **28**, No. 3-4, (2003), 1009–1037.

[6.7] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Commun. Math. Phys.* 238 (2003) 1-2, 211–223.

[6.8] P. Carlès, S. Popinet, The effect of viscosity, surface tension and non-linearity on Richtmyer-Meshkov instability. *Eur. J. Mech. B Fluids* 21 (2002), no. 5, 511–526.

[6.9] C. Cherfils-Clérouin, O. Lafitte, P.–A. Raviart, Asymptotic results for the linear stage of the Rayleigh-Taylor Instability *Mathematical fluid mechanics,* 47–71, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhauser, Basel, (2001).

[6.10] R. Danchin, B. Desjardins. Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type. *Annales de l'IHP, Analyse Non Linaire,* 18, pages 97–133 (2001).

[6.11] G.P. Galdi, D.D. Joseph, L. Preziosi, S. Rionero, Mathematical problems for miscible incompressible fluids with Korteweg stresses. *Eur. J. Mech. B/Fluids,* **10**, (1991), 253–267.

[6.12] H. Hattori, D. Li. The existence of global solutions to a fluid dynamic model for materials for Korteweg type. *J. Partial Differential Equations* 9 (1996), no. 4, 323–342.

[6.13] H. Hattori, D. Li. Global solutions of a high-dimensional system for Korteweg materials. *J. Partial Differential Equations* 198(1), 84–97, (1996).

[6.14] B. HELFFER, O. LAFITTE, Asymptotic methods for the Rayleigh equation for the linearized Rayleigh-Taylor instability. Preprint Université Paris-Sud, Mathématiques, No (2002)-20.

[6.15] D. JAMET, Diffuse interface models in fluid mechanics. GdR CNRS documentation, see pmc.polytechnique.fr/mp/GDR/docu/Jamet.pdf

[6.16] D.J. KORTEWEG, Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérable mais continues et sur la théorie de la capillarité dan l'hypothèse d'une variation continue de la densité. *Arch. Néerl. Sci. Exactes Nat. Ser. II,* 6:1–24, (1901).

[6.17] K.O. MIKAELIAN, Rayleigh-Taylor and Richtmer-Meshkov instabilities in multilayers; fluids with surface tension. *Phys. Rev. A,* vol. 42, no 12, (1990), 7211–7225.

[6.18] K.O. MIKAELIAN, Rayleigh-Taylor instability in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension. *Phys. Rev. E,* vol. 54, no 4-A, (1996), 3676–3680.

[6.19] C. ROHDE, On local and non-local Navier-Stokes-Korteweg systems for liquid-vapour phase transitions. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 85* (2005), no. 12, 839–857.

[6.20] P. SARAMITO, Modélisation et calcul des interfaces bi-fluides. *Notes de cours.* Voir ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/cours-interface.pdf

Chapter VII

MHD for compressible fluids interface

Submitted for publication: R. SART, Existence result about a 2-D MHD model for a fluid-fluid diffuse interface, (2007).

Abstract

In this paper we are interested in showing the stability of weak solutions for a model with density dependent viscosities using the D. BRESCH and B. DESJARDINS' strategy in the periodic case.

7.1. Introduction

In MagnetoHydroDynamics, some existence results have already been given by E. FEIREISL [7.6] in the compressible barotropic case for constant viscosities or in the incompressible case for non constant viscosities, namely by J.–F. GERBEAU, C. LE BRIS et T. LELIÈVRE [7.7] but the general MHD model for compressible fluids and viscosities depending on density is open. It seems to be a hard problem mainly because of the vacuum. The complete model with heat conduction is an interesting subject too and also presents many similar difficulties. B. DUCOMET and E. FEIREIL gave an existence result for monoatomic heat conducting gases but they did not deal with the problem of density-dependent viscosities. Models with density-degenerate assumptions has recently been studied by D. BRESCH and B. DESJARDINS [7.1]–[7.5] in the non-magnetic case. They show a new mathematical structure for some fluid mechanics models like the classical compressible Navier-Stokes equations with temperature and they explain how we can find this very structure in other ones like capillary models. A further work consists in generalizing this structure to magnetic models, the first and global idea concerns the general MHD system for compressible fluids, considering density-dependent viscosities (and resistivity) but this does not seem to be straightforward. The main difficulty for such models consists in getting enough estimates on the density, the capillarity context may give some hope to succeed.

In this paper, we are looking at an interface between two fluids which are both submitted to an external magnetic field. The motion of each fluid is related to the magnetic force but also to the presence of the other fluid. A way to modelize such an interaction is to follow the idea of the so called Korteweg by building global equations taking into account influences at the interface instead of considering partial systems for each fluid.
So, we are led to study a system representing the evolution of the two fluids from a global point of view, that is to say by considering an only fluid of density ϱ and velocity $\vec{u}$ in a classical MHD model of Korteweg type as follows:

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}) = 0, \tag{7.1}$$

$$\partial_t(\varrho\vec{u}) + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla P - \vec{j}\wedge\vec{B} - \varrho\nabla\big(\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)\big) = 2\mathrm{div}\big(\mu(\varrho)D(\vec{u})\big) + \nabla(\lambda(\varrho)\mathrm{div}\vec{u}), \tag{7.2}$$

$$\partial_t\vec{B} - \mathrm{curl}(\vec{u}\wedge\vec{B}) + \mathrm{curl}\big(\eta(\varrho)\vec{j}\big) = 0, \tag{7.3}$$

$$\vec{j} = \mathrm{curl}\vec{B}, \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{7.4}$$

In this work, we consider this model in a 2-dimensional space, in particular we suppose that all the preceding quantities only depend on $x = (x_1, x_2)$ and that $\vec{u} = \big(u^1(t,x); u^2(t,x); 0\big)$ and $\vec{B} = \big(B^1(t,x); B^2(t,x); 0\big)$.
The first two equations are respectively mass and momentum conservation equation, the quantities $\lambda = \lambda(\varrho)$, $\mu = \mu(\varrho)$ are called viscosity coefficients. $\vec{B}$ is the magnetic field, P is the pressure, depending on the density and the temperature of the fluid and composed as follows

$$P = p(\varrho,\theta) + p_c(\varrho), \quad p(\varrho,\theta) = r\varrho\theta,$$

with a cold pressure component p_c. The other equations come from more or less approximate Maxwell equations, $\eta = \eta(\varrho)$ represents the resistivity of the fluid.
One more equation will be considered here, the one which concerns the temperature θ of the fluid, namely

$$C_v\big(\partial_t(\varrho\theta) + \mathrm{div}(\varrho\vec{u}\theta)\big) + r\varrho\theta\mathrm{div}\vec{u} - \mathrm{div}\big(\kappa(\varrho,\theta)\nabla\theta\big) = 2\mu(\varrho)D(\vec{u}) : D(\vec{u}) + \lambda(\varrho)|\mathrm{div}\vec{u}|^2 + \eta(\varrho)|\vec{j}|^2, \tag{7.5}$$

where $\kappa = \kappa(\varrho,\theta)$ is a thermal conductivity coefficient.
To complete this system, we add the following initial conditions

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0, \quad \varrho\vec{u}|_{t=0} = \vec{m}_0, \quad \vec{B}|_{t=0} = \vec{B}_0,$$
$$\varrho E|_{t=0} = G_0 + \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\vec{B}_0|^2}{2} + \frac{|\nabla\mu(\varrho_0)|^2}{2}, \tag{7.6}$$

with the conditions

$$\varrho_0 \geq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \ \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} = 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 = 0\}. \tag{7.7}$$

$$G_0(x) \in \overline{\varrho_0(x) e(\varrho_0(x), \mathbb{R}_+)}, \text{ for a.e. } x \in \Omega. \tag{7.8}$$

This assumption on the initial condition G_0 allows us to define the initial condition θ_0 on the set $\{\varrho_0 \neq 0\}$ by

$$\theta_0(x) = e(\varrho_0(x), \cdot)^{-1}\big(\{G_0(x)/\varrho_0(x)\}\big) \geq 0 \text{ a.e. on } \{\varrho_0 \neq 0\}. \tag{7.9}$$

We finally add the initial conditions on the magnetic field :

$$\mathrm{div}\vec{B}_0 = 0. \tag{7.10}$$

The following work is dedicated to the proof of a stability result of weak solutions for the MHD interface model (7.1)–(7.5) with initial conditions (7.6)–(7.10). Whereas it seems to be difficult to get this result for the classical MHD model, the estimates on the density related to the new BD entropy together with the capillary term suffices to get a stability theorem.

7.2. Assumptions

7.2.1. Coefficients dependance

Some of all the coefficients and quantities cited just before are related to each other and are submitted to many conditions.
First of all, λ and μ are supposed to be respectively $C^0(\mathbb{R}_+)$ and $C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$ and satisfy

$$\forall s > 0, \ \lambda(s) = 2(s\mu'(s) - \mu(s)). \tag{7.11}$$

We also suppose that $\mu(0) = 0$ and that there exists positive constants c_0, c_1, A and $m > 1$, $\frac{2}{3} < n < 1$ such that

$$\forall s < A, \ \ \mu(s) \geq c_0 s^n, \ 3\lambda(s) + 2\mu(s) \geq c_0 s^n, \tag{7.12}$$

$$\forall s \geq A, \ \ c_1 s^m \leq \mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m, \ c_1 s^m \leq 3\lambda(s) + 2\mu(s) \leq \frac{1}{c_1} s^m. \tag{7.13}$$

The positive resistivity η is a continuous function of the density and we suppose that there exists $B > 0$, positive constants d_0, d_0', d_1, d_1' high enough, $2 \leq a < a' < 3$ and $b \in [0, +\infty[$ such that

$$\forall s < B, \ \ \frac{d_0}{s^a} \leq \eta(s) \leq \frac{d_0'}{s^{a'}} \ \text{ and } \ \forall s \geq B, \ d_1 \leq \eta(s) \leq d_1' s^b. \tag{7.14}$$

Next, the thermal conductivity coefficient is assumed to satisfy

$$\kappa(\varrho, \theta) = \kappa_0(\varrho, \theta)(\varrho + 1)(\theta^a + 1), \tag{7.15}$$

where $a \geq 2$ and κ_0 is a $C^0(\mathbb{R}_+^2)$ function such that

$$\exists C > 0 \ ; \ \ C \leq \kappa_0(s_1, s_2) \leq \frac{1}{C}, \ \ \forall s_1 > 0, \forall s_2 > 0. \tag{7.16}$$

7.2.2. Cold pressure

The cold pressure p_c is related to the internal energy e_c through the relation

$$p_c(\varrho) = \varrho^2 e_c'(\varrho), \tag{7.17}$$

and must respect all the following constraints :
$\exists\ \varrho_*, \tau_*, C_*, C_*', C_{**}, C_{**}' > 0$, $k > 1$ and $l > 6n - 1$ such that

$$\forall \varrho \in (0, \varrho_*), \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*} \leq p_c'(\varrho) \leq C_* \varrho^{-l-1}, \quad \frac{\varrho^{-l-1}}{C_*'} \leq e_c(\varrho) \leq C_*' \varrho^{-l-1}, \tag{7.18}$$

$$\forall \varrho > \varrho_*, \quad -\frac{1}{\tau_*}\mu'(\varrho) \leq p_c'(\varrho) \leq C_{**}\varrho^{k-1}, \quad 0 \leq e_c(\varrho) \leq C_{**}'\varrho^{k-1}. \tag{7.19}$$

7.3. Main result

7.3.1. Temperature equation

Adding the momentum equation multiplied by $\vec{u}$ to equation (7.5), we also get another equivalent version:

$$\partial_t(\varrho E) + \mathrm{div}(\varrho \vec{u} H) = \mathrm{div}(\delta \cdot \vec{u}) + \mathrm{div}\big(\kappa(\varrho,\theta)\nabla\theta\big) + \mathrm{div}\big(\eta(\varrho)\vec{j} \wedge \vec{B}\big), \tag{7.20}$$

$$-\mathrm{div}\big((\vec{u} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}\big) - \mathrm{div}\big(\varrho\mu'(\varrho)\Delta\mu(\varrho)\vec{u}\big) - \mathrm{div}\big(\partial_t\mu(\varrho)\nabla\mu(\varrho)\big),$$

with the following notations

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + {}^t\nabla\vec{u}), \quad \delta = 2\mu D(\vec{u}) + \lambda \mathrm{div}\vec{u}\ \mathbf{I},$$

$$e = C_v\theta + e_c(\varrho), \quad \varrho E = \varrho e + \frac{1}{2}\Big(\varrho|\vec{u}|^2 + |\vec{B}|^2 + |\nabla\mu(\varrho)|^2\Big),$$

$$h = e + P/\varrho, \quad H = h + |\vec{u}|^2/2,$$

where e_c is an internal energy term, e is the specific internal energy, E the specific total energy, h and H specific enthalpies respectively associated to e and E. The system (7.1)–(7.5) is equivalent to the corresponding system obtained by replacing (7.5) by (7.20), so either (7.5) or (7.20) can be considered in what follows.

7.3.2. Weak solutions

Definition 7.1. *We will understand as a weak solution of (7.1)–(7.6), all $(\varrho, \vec{u}, \vec{B}, \theta)$ satisfying the following conditions :*

(i) equations (7.1)–(7.5) hold in $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$,
(ii) the initial conditions (7.6) hold in $\mathcal{D}'(\Omega)$ and (7.7)–(7.10) are satisfied
(iii) we have these regularity properties

$$\sqrt{\varrho e},\ \sqrt{\varrho}\vec{u},\ \vec{B},\ \frac{\nabla\mu(\varrho)}{\sqrt{\varrho}},\ \nabla\mu(\varrho)\ \in\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$(\varrho^{n/2}+\varrho^{m/2})\nabla\vec{u},\ \ \nabla\vec{B},\ \ (1+\sqrt{\varrho})\nabla\theta^{a/2},\ \ (1+\sqrt{\varrho})\frac{\nabla\theta}{\theta}\ \in\ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$\varrho,\ \varrho\vec{u},\ \vec{B},\ \varrho E\ \in\ C([0,T];H^{-\sigma}(\Omega)),\ \textit{for } \sigma>0 \textit{ large enough.}$$

7.3.3. Statement of the main result

Theorem 7.2. *Let Ω be a two dimensional periodic box $[0,2\pi]^2$ or the whole space $\mathbb{R}^2$. Suppose that initial data satisfy (7.7)–(7.10), suppose that conditions (7.11)–(7.19) hold and that we also have*

$$\int_\Omega\Big(G_0+\frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0}+\frac{|\vec{B}_0|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_0)|^2}{2}\Big)dx<+\infty,\ \frac{\nabla\mu(\varrho_0)}{\sqrt{\varrho_0}}\ \in L^2(\Omega),$$
$$\varrho_0-\varrho_\infty,\ \ \varrho_0\log\Big(\frac{\varrho_\infty}{\varrho_0}\Big),\ \ \varrho_0 e_c(\varrho_0),\ \ \varrho_0 s_0\ \in L^1(\Omega),$$

for some $\varrho_\infty>0$ and the initial entropy $s_0=C_v\log(\theta_0/\varrho_0^\Gamma)$. Then, there exists a global weak solution $(\varrho,\vec{u},\vec{B},\theta)$ of the system (7.1)–(7.6).

We will here just prove the most difficult part of that result, say, the stability of any sequence ϱ_n, $\vec{u}_n$, $\vec{B}_n$ and θ_n when n goes to infinity. The construction of approximate solutions can be done by regularization taking some ideas from [7.3].

7.4. Energy estimates

7.4.1. Entropy equation

Let introduce the entropy $s_n = C_v\log(\theta_n/\varrho_n^\Gamma)$, this new quantity satisfy the following equation :

$$\theta_n\big(\partial_t(\varrho_n s_n)+\mathrm{div}(\varrho_n s_n\vec{u}_n)\big)= \tag{7.21}$$
$$2\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n):D(\vec{u}_n)+\lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2+\mathrm{div}\big(\kappa(\varrho_n,\theta_n)\nabla\theta_n\big)+\eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2.$$

So, by integrating on $(0,t)\times\Omega$, we get, with the notation $S(\vec{u}_n)=D(\vec{u}_n)-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{u}_n\mathbf{I}$:

$$\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{\theta_n}\Big(2\mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)+\big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\Big) \tag{7.22}$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2}+2\int_0^t\int_\Omega\frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2\le\int_\Omega\big(\varrho_n s_n(t,\cdot)+\varrho_0(s_0)_-\big).$$

7.4.2. Energies and BD formula

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\frac{|\vec{u}_n|^2}{2}+\frac{|\vec{B}_n|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2}+C_v\varrho_n\theta_n+\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)=0, \tag{7.23}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+|\vec{B}_n|^2+|\nabla\mu(\varrho_n)|^2+2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)+\int_\Omega 2\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n):D(\vec{u}_n)$$
$$+\int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2+\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2=\int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n, \tag{7.24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2+|\vec{B}_n|^2+|\nabla\mu(\varrho_n)|^2+2\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)+\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2$$
$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)+2\int_\Omega \frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2+\int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2= \tag{7.25}$$
$$\int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n-2\int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho_n-2\int_\Omega \mu'(\varrho_n)p_c'(\varrho_n)\frac{|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n}$$
$$+2\int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n},$$

where $A(\vec{u}_n)=\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}_n-{}^t\nabla\vec{u}_n)$.

7.4.3. Proofs

−Proof of (7.22) and *(7.23)−*

To get this relation (7.22), we must integrate the equation (7.21) divided by θ_n, and the inequality comes from the positivity of $\varrho_0(s_0)_+$. The relation (7.23) is simply obtained by integrating (7.20). □

−Proof of (7.24)−

Summing (7.2) multiplied by $\vec{u}_n$ and (7.3) multiplied by $\vec{B}_n$ and then integrating on Ω, one directly gets,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho_n\frac{|\vec{u}_n|^2}{2}+\frac{|\vec{B}_n|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2}\Big)+\int_\Omega 2\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n):D(\vec{u}_n)$$
$$+\int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2+\int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2=\int_\Omega P(\varrho_n,\theta_n)\mathrm{div}\vec{u}_n.$$

Since $P(\varrho_n,\theta_n)=r\varrho_n\theta_n+p_c(\varrho_n)$, with condition (7.17), we also have

$$\int_\Omega P(\varrho_n,\theta_n)\mathrm{div}\vec{u}_n = \int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n - \frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n e_c(\varrho_n),$$

what achieves the proof of (7.24). $\square$

–Proof of (7.25)–

We multiply (7.2) by $\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$ and integrate by parts on Ω, we obtain :

$$\int_\Omega(\partial_t\vec{u}_n + \vec{u}_n\cdot\nabla\vec{u}_n)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) + 2\int_\Omega \mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n) : \Big(\frac{\nabla\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} - \frac{\nabla\mu(\varrho_n)\otimes\nabla\varrho_n}{\varrho_n^2}\Big)$$
$$-\int_\Omega \nabla\big(\lambda(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} - \int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$$
$$+\int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2 + \int_\Omega \nabla P(\varrho_n,\theta_n)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} = 0. \tag{7.26}$$

We now look at the mass conservation equation (7.1) multiplied by $\varphi'(\varrho_n) = \frac{\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}$, it gives :

$$\partial_t\varphi(\varrho_n) + \vec{u}_n\cdot\nabla\varphi(\varrho_n) + \varphi'(\varrho_n)\varrho\mathrm{div}\vec{u}_n = 0,$$

and then, deriving with respect to the space variable :

$$\partial_t\nabla\varphi(\varrho_n) + (\vec{u}_n\cdot\nabla)\nabla\varphi(\varrho_n) + (\nabla\vec{u}_n\cdot\nabla)\varphi(\varrho_n) + \nabla\big(\varphi'(\varrho_n)\varrho\mathrm{div}\vec{u}_n\big) = 0.$$

Next, we integrate on Ω this equation multiplied by $2\varrho_n\nabla\varphi(\varrho_n) = 2\nabla\mu(\varrho_n)$, we end to :

$$\int_\Omega 2\varrho_n\nabla\varphi(\varrho_n)\partial_t\nabla\varphi(\varrho_n) + \int_\Omega 2(\varrho_n\vec{u}_n\cdot\nabla)\nabla\varphi(\varrho_n)\cdot\nabla\varphi(\varrho_n)$$
$$+2\int_\Omega \varrho_n(\nabla\vec{u}_n\cdot\nabla)\varphi(\varrho_n)\cdot\nabla\varphi(\varrho_n) + 2\int_\Omega \nabla\big(\varphi'(\varrho_n)\varrho_n\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\varrho_n\nabla\varphi(\varrho_n) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 - \int_\Omega |\nabla\varphi(\varrho_n)|^2\partial_t\varrho_n + \int_\Omega(\varrho_n\vec{u}_n\cdot\nabla)|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2$$
$$+2\int_\Omega\frac{1}{\varrho_n}(\nabla\vec{u}_n\cdot\nabla)\mu(\varrho_n)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) + 2\int_\Omega\nabla\big(\mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) = 0.$$

But, integrating by parts, we get

$$\int_\Omega(\varrho_n\vec{u}_n\cdot\nabla)|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 = \int_\Omega \mathrm{div}(\varrho_n\vec{u}_n)|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 = -\int_\Omega \partial_t\varrho_n|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2,$$

and

$$\int_\Omega\frac{1}{\varrho_n}(\nabla\vec{u}_n\cdot\nabla)\mu(\varrho_n)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) =$$

$$\int_\Omega \frac{1}{\varrho_n}\partial_i u_n^j \partial_j \mu(\varrho_n)\partial_i\mu(\varrho_n) = -\int_\Omega \mu(\varrho_n)\partial_j\Big(\frac{1}{\varrho_n}\partial_i u_n^j \partial_i\mu(\varrho_n)\Big)$$

$$= -\int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\partial_j\partial_i u_n^j \partial_i\mu(\varrho_n) - \int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\partial_i u_n^j \partial_j\partial_i\mu(\varrho_n)$$

$$+\int_\Omega \mu(\varrho_n)\frac{\partial_j\varrho_n}{\varrho_n^2}\partial_i u_n^j\partial_i\mu(\varrho_n)$$

$$= -\int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)\nabla\mathrm{div}\vec{u}_n\cdot\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} - \int_\Omega \mu(\varrho_n)\nabla\vec{u}_n : \frac{\nabla\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$$

$$+\int_\Omega \mu(\varrho_n)\nabla\vec{u}_n : \frac{\nabla\mu(\varrho_n)\otimes\nabla\varrho_n}{\varrho_n^2}.$$

So

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 - 2\int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)\nabla\mathrm{div}\vec{u}_n\cdot\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} + 2\int_\Omega \nabla\big(\mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\nabla\mu(\varrho_n)$$

$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)\nabla\vec{u}_n : \Big(\frac{\nabla\mu(\varrho_n)\otimes\nabla\varrho_n}{\varrho_n^2} - \frac{\nabla\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big) = 0. \tag{7.27}$$

Thus, summing (7.26) and (7.27), we finally have the equality

$$\int_\Omega(\partial_t\vec{u}_n + \vec{u}_n\cdot\nabla\vec{u}_n)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) + \frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 - 2\int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)\nabla\mathrm{div}\vec{u}_n\cdot\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$$

$$+2\int_\Omega \nabla\big(\mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) - \int_\Omega \nabla\big(\lambda(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$$

$$-\int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} + \int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2 + \int_\Omega \nabla P(\varrho_n,\theta_n)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} = 0,$$

which, observing that

$$2\int_\Omega \frac{\mu(\varrho_n)\nabla\mathrm{div}\vec{u}_n\cdot\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} = 2\int_\Omega \nabla\big(\mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\nabla\mu(\varrho_n)$$

$$-\int_\Omega \nabla\big(\lambda(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n\big)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n},$$

can be rewritten as follows

$$\int_\Omega(\partial_t\vec{u}_n + \vec{u}_n\cdot\nabla\vec{u}_n)\cdot\nabla\mu(\varrho_n) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega 2\varrho_n|\nabla\varphi(\varrho_n)|^2 \tag{7.28}$$

$$-\int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} + \int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2 + \int_\Omega \nabla P(\varrho_n,\theta_n)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} = 0.$$

Now look at the first term of (7.28) :

$$\int_\Omega (\partial_t \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \nabla \vec{u}_n) \cdot \nabla \mu(\varrho_n) =$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla \mu(\varrho_n) - \int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla \partial_t \mu(\varrho_n) + \int_\Omega u^j \partial_j u^i \partial_i \mu(\varrho_n).$$

Well,

$$\int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla \partial_t \mu(\varrho_n) = \int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla\big(\mu'(\varrho_n)\partial_t \varrho_n\big)$$

$$= \int_\Omega \mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n(\varrho_n \mathrm{div}\vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \nabla \varrho_n)$$

$$= \int_\Omega \varrho_n \mu'(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 + \int_\Omega \mu'(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n(\vec{u}_n \cdot \nabla \varrho_n),$$

and

$$\int_\Omega u^j \partial_j u^i \partial_i \mu(\varrho_n) = -\int_\Omega \mu(\varrho_n)\partial_i(u^j \partial_j u^i)$$

$$= -\int_\Omega \mu(\varrho_n)\partial_i u^j \partial_j u^i - \int_\Omega \mu(\varrho_n) u^j \partial_i \partial_j u^i$$

$$= -\int_\Omega \mu(\varrho_n)\partial_i u^j \partial_j u^i + \int_\Omega \partial_j \mu(\varrho_n) u^j \partial_i u^i + \int_\Omega \mu(\varrho_n)\partial_j u^j \partial_i u^i$$

$$= -\int_\Omega \mu(\varrho_n)\,{}^t\nabla \vec{u}_n : \nabla \vec{u}_n + \int_\Omega \mathrm{div}\vec{u}_n(\vec{u}_n \cdot \nabla \mu(\varrho_n)) + \int_\Omega \mu(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2.$$

So we get

$$\int_\Omega (\partial_t \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \nabla \vec{u}_n) \cdot \nabla \mu(\varrho_n) =$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla \mu(\varrho_n) - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 - \int_\Omega \mu(\varrho_n)\,{}^t\nabla \vec{u}_n : \nabla \vec{u}_n.$$

We then deduce a new formulation of (7.28) :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \vec{u}_n \cdot \nabla \mu(\varrho_n) - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 - \int_\Omega \mu(\varrho_n)\,{}^t\nabla \vec{u}_n : \nabla \vec{u}_n$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega 2\varrho_n \Big|\frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2 - \int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n}$$
$$+\int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta \mu(\varrho_n)|^2 + \int_\Omega \nabla P(\varrho_n, \theta_n) \cdot \frac{\nabla \mu(\varrho_n)}{\varrho_n} = 0.$$

Adding to this last equality multiplied by 2, the equation of $\vec{u}_n$ multiplied by $\vec{u}_n$ and the one of $\vec{B}_n$ multiplied by $\vec{B}_n$, we finally have :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varrho_n\Big|\vec{u}_n + 2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2 + \frac{|\vec{B}_n|^2}{2} + \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2} + \varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)$$

$$+2\int_\Omega \mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n) + \int_\Omega \eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2 + \int_\Omega \mu'(\varrho_n)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2 =$$

$$\int_\Omega r\varrho_n\theta_n \mathrm{div}\vec{u}_n + 2\int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} - 2\int_\Omega \nabla P(\varrho_n,\theta_n)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}.$$

Let's now deal with this last term :

$$\int_\Omega \nabla P(\varrho_n,\theta_n)\cdot\frac{\nabla\mu(\varrho)}{\varrho_n} = \int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n\cdot\nabla\varrho + \int_\Omega r\theta_n\mu'(\varrho_n)\frac{|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n}$$

$$+\int_\Omega p_c'(\varrho_n)\mu'(\varrho_n)\frac{|\nabla\varrho_n|^2}{\varrho_n},$$

and we have finished this proof and shown (7.25). □

7.4.4. Estimates on ϱ_n, $\vec{u}_n$, $\vec{B}_n$ and θ_n

In this paragraph, we invit the reader to refer to [7.2] for more details. Nevertheless we are going to say some words about how to bound some integral terms and we will see that Gronwall arguments lead finally to our estimates.

7.4.4.4. Control of right hand sides

For the equation (7.23), with no right hand side, we already have estimates, namely, $\varrho_n|\vec{u}_n|^2$, $|\vec{B}_n|^2$, $\varrho_n\theta_n$ and $\varrho_n e_c(\varrho_n)$ are bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ thanks to the equation

$$\int_\Omega \Big(\varrho_n\frac{|\vec{u}_n|^2}{2} + \frac{|\vec{B}_n|^2}{2} + \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2} + C_v\varrho_n\theta_n + \varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)$$

$$\leq \int_\Omega \Big(G_0 + \frac{|\vec{m}_0|^2}{2\varrho_0} + \frac{|\vec{B}_0|^2}{2} + \frac{|\nabla\mu(\varrho_0)|^2}{2}\Big) = \Lambda_0. \tag{7.29}$$

Then let's try to deal with the other equations (7.22), (7.24) and (7.25), for that, we must take care of the order in which we are going to proceed.

• First, we have, for equation (7.22), recalling that $s_n = C_v\log(\theta_n/\varrho_n^\Gamma)$,

$$\int_\Omega \varrho_n s_n(t,\cdot) \leq \int_\Omega \varrho_n C_v\theta_n(t,\cdot) + \int_\Omega \Gamma C_v\varrho_n\log(\varrho_\infty/\varrho_n),$$

and to control the last integral term, we may use a renormalized version of the mass conservation equation for $\beta_\infty(\varrho_n) = \varrho_n\log(\varrho_\infty/\varrho_n)$ as follows

$$\partial_t\beta_\infty(\varrho_n) + \mathrm{div}(\beta_\infty(\varrho_n)\vec{u}_n) - \varrho_n\mathrm{div}\vec{u}_n = 0.$$

Then,

$$\int_\Omega \varrho_n s_n(t,\cdot) \leq \int_\Omega \varrho_n C_v \theta_n(t,\cdot) + \Gamma C_v \Big(\int_\Omega \beta_\infty(\varrho_0) + \int_0^t \int_\Omega \varrho_n |\mathrm{div} \vec{u}_n| \Big).$$

We have just said that $\varrho_n \theta_n$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, and thanks to the conditions $n > 1$ and $m < 1$ we can also assure that $\frac{\varrho_n}{3\lambda(\varrho_n)+2\mu(\varrho_n)}$ is bounded by C in $L^\infty((0,T)\times\Omega)$, that is why we can write

$$\int_0^t \int_\Omega \varrho_n |\mathrm{div}\vec{u}_n| \leq \int_0^t \int_\Omega \Big(\frac{\varepsilon}{\theta_n} \big(3\lambda(\varrho_n) + 2\mu(\varrho_n)\big) |\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 + \frac{\sqrt{C}}{\varepsilon} \varrho_n \theta_n \Big).$$

Reminding that $\varrho_n \theta_n$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ and choosing $\varepsilon < 1/3$, we get, for all $t \in (0,T)$,

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\theta_n} \Big(2\mu(\varrho_n) S(\vec{u}_n) : S(\vec{u}_n) + (1-3\varepsilon)\big(\lambda(\varrho_n) + \frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2 \Big)$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n) \frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2} + 2\int_0^t \int_\Omega \frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n} |\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2 \leq C_{T,0}. \tag{7.30}$$

• Now is the turn of equation (7.24) and (7.25) :

$$\int_\Omega \mu'(\varrho_n) p_c'(\varrho_n) \frac{|\nabla \varrho_n|^2}{\varrho_n} \geq c_0 \int_\Omega |\nabla \zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2 - \frac{1}{\tau_*} \int_\Omega \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n},$$

where we have chosen the function ζ, smooth on $\mathbb{R}_+$, and satisfying $\zeta(\varrho_n) = \varrho_n$ for $\varrho_n \leq \varrho_*/2$ and $\zeta(\varrho_n) = 0$ for $\varrho_n > \varrho_*$. For this one, nothing to add, the first part of the right hand side will appear in the left hand side of (7.25) and the second will stay in the right hand side and will be treated by Gronwall's lemma.
Equation (7.30) shows that $\sqrt{\kappa(\varrho_n,\theta_n)}\frac{\nabla\theta_n}{\theta_n}$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. In addition to conditions (7.15) and (7.16) with $a \geq 2$, we can write, after using a Cauchy-Schwarz inequality,

$$\Big| \int_\Omega r\mu'(\varrho_n)\nabla\theta_n \cdot \nabla\varrho_n \Big| \leq \int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2} + \int_\Omega C \frac{r^2 \varrho_n \theta_n^2}{\kappa(\varrho_n,\theta_n)} \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}$$
$$\leq C\Big(1 + \int_\Omega \frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\Big).$$

For the term concerning the magnetic field,

$$2\Big| \int_\Omega \mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n \cdot \frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n} \Big| \leq \int_\Omega \frac{|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2}{\varepsilon \varrho_n^2} + \varepsilon \int_\Omega |\nabla\mu(\varrho_n) \wedge \vec{B}_n|^2.$$

The first term of the right hand side will be sent to the left hand side of equation (7.25) and will be compensated with the term related to the resistivity thanks to the profiles conditions introduced in (7.14).

It is a little bit long to deal with the second one. Here is the hypothesis of the dimension. In a 2-dimensional space, we can insure that $W^{1,1} \subset L^2$ and this will be the main tool to be clear with this term. We have

$$\begin{aligned}\big\|\nabla\mu(\varrho_n)\wedge\vec{B}_n\big\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C\big\|\nabla\mu(\varrho_n)\wedge\vec{B}_n\big\|^2_{W^{1,1}(\Omega)}\\ &\leq C\Big(\|\Delta\mu(\varrho_n)\|^2_{L^2}\|\vec{B}_n\|^2_{L^2}+\|\nabla\mu(\varrho_n)\|^2_{L^2}\|\mathrm{curl}\vec{B}_n\|^2_{L^2}\\ &\qquad+\big\|\nabla\mu(\varrho_n)\wedge\vec{B}_n\big\|^2_{L^1(\Omega)}\Big)\end{aligned}$$

But, from (7.29), we already know that $\|\vec{B}_n\|_{L^2}$ and $\|\nabla\mu(\varrho_n)\|_{L^2}$ are uniformly bounded by Λ_0 , that is why we also get

$$\big\|\nabla\mu(\varrho_n)\wedge\vec{B}_n\big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(1+\|\Delta\mu(\varrho_n)\|^2_{L^2}+\|\mathrm{curl}\vec{B}_n\|^2_{L^2}\Big)$$

For the last integral term :

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega r\varrho_n\theta_n\mathrm{div}\vec{u}_n\Big| &\leq \varepsilon\big\|\big(3\lambda(\varrho_n)+2\mu(\varrho_n)\big)^{1/2}\mathrm{div}\vec{u}_n\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{C}{\varepsilon}\|\varrho_n\theta_n\|^2_{L^1(\Omega)}\\ &\quad+\frac{C}{\varepsilon}\Big(1+\|\theta_n\|^2_{L^6(\Omega)}\Big)\Big(\int_\Omega\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}+\eta\|\varrho_n\|^2_{L^1(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

The second term of the right hand side is known to be bounded thanks to (7.29).
So we get, summing (7.24) and (7.25) and taking into account all these inequalities, for ε small enough,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2+2|\vec{B}_n|^2+2|\nabla\mu(\varrho_n)|^2+4\varrho_n e_c(\varrho_n)\Big)\\ &\quad+2\int_\Omega\mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)+(1-6\varepsilon)\int_\Omega\big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\\ &\quad+2\int_\Omega\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)+2\int_\Omega\big(\eta(\varrho_n)-\frac{1}{\varepsilon\varrho_n^2}-C\varepsilon\big)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2\\ &+\int_\Omega\big(\mu'(\varrho_n)-C\varepsilon\big)|\Delta\mu(\varrho_n)|^2+2\int_\Omega\frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2+c_0\int_\Omega|\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2\\ &\leq C\Big(1+\|\theta_n\|^2_{L^6(\Omega)}\Big)\Big(\eta\|\varrho_n\|^2_{L^1(\Omega)}+\int_\Omega\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\Big)+C'\int_\Omega|\vec{B}_n|^2+C''.\end{aligned}\tag{7.31}$$

At this stage, let's give some remarks.
We are of course considering here some coefficients $\varepsilon < 1/6$ and such that $\mu' - C\varepsilon$ still higher than a constant that we will note δ. From that, it also appears the necessary conditions on the constants d_0 and d_1, cited in (7.14), to be high enough because we need to have $\eta(\varrho_n) - \varepsilon^{-1}\varrho_n^{-2} - C\varepsilon \geq 0$. In fact, we can obtain that condition by supposing $d_0 \geq \varepsilon B^2 + c/\varepsilon$ and $d_1 \geq c/(\varepsilon B^2) + \varepsilon$.

To conclude, we apply a Gronwall lemma, we will talk about it in the next subsection.

7.4.4.5. Gronwall's lemma

Let's rewrite what we have just obtain :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2+2|\vec{B}_n|^2\Big)$$
$$\le C\Big(1+\|\theta_n\|^2_{L^6(\Omega)}\Big)\Big(\eta\|\varrho_n\|^2_{L^1(\Omega)}+\int_\Omega\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\Big)+C'\int_\Omega|\vec{B}_n|^2+C'' \qquad (7.32).$$

We first remark that $\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{\varrho_n}\le\frac{1}{2}\Big(\varrho_n|\vec{u}_n|^2+\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2\Big)$. Moreover, thanks to the mass conservation equation, we know that $\|\varrho_n\|_{L^1(\Omega)}=\|\varrho_0\|_{L^1(\Omega)}$, and, thanks to lemma 7.7, which insures that θ_n is bounded in $L^2(0,T;L^6(\Omega))$, so that we are in the case where $\partial_t f_n\le g_nf_n+h_n$ with g_n and h_n two sequences bounded in $L^1_{loc}((0,T)\times\Omega)$, what allows us to apply the corresponding Gronwall's lemma.

7.4.4.6. A priori estimates

We recapitulate here what we can deduce from inequalities (7.29), (7.30) and (7.31) :

$$\int_0^t\int_\Omega\frac{1}{\theta_n}\Big(2\mu(\varrho_n)S(\vec{u}_n):S(\vec{u}_n)+\big(\lambda(\varrho_n)+\frac{2}{3}\mu(\varrho_n)\big)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\Big)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{|\nabla\theta_n|^2}{\theta_n^2}+2\int_0^t\int_\Omega\frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2\le C_{T,0},$$

$$\int_\Omega\Big(\varrho_n\frac{|\vec{u}_n|^2}{2}+\frac{|\vec{B}_n|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2}+C_v\varrho_n\theta_n+\varrho_ne_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)\le C_{T,0},$$

$$\int_\Omega\Big(\varrho_n\frac{|\vec{u}_n|^2}{2}+\frac{|\vec{B}_n|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2}+\varrho_ne_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n):D(\vec{u}_n)+\int_0^t\int_\Omega\lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega\eta(\varrho_n)|\mathrm{curl}\vec{B}_n|^2\le C_{T,0},$$

$$\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\varrho_n\Big|\vec{u}_n+2\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\varrho_n}\Big|^2+\frac{|\vec{B}_n|^2}{2}+\frac{|\nabla\mu(\varrho_n)|^2}{2}+\varrho_ne_c(\varrho_n)\Big)(t,\cdot)$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega\mu(\varrho_n)A(\vec{u}_n):A(\vec{u}_n)+2\int_0^t\int_\Omega\frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}|\nabla\varrho_n|^2$$
$$+\delta\int_0^t\int_\Omega|\Delta\mu(\varrho_n)|^2+c_0\int_0^t\int_\Omega|\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}|^2\le C_{T,0}.$$

Under the conditions on initial data cited in theorem 7.2, we finally get the following uniform bounds :

$$\sqrt{\varrho\theta_n},\quad \sqrt{\varrho_n e_c(\varrho_n)},\quad \sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n,\quad \vec{B}_n,\quad \frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}},\quad \nabla\mu(\varrho_n) \tag{7.33}$$

$$\text{bounded in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$\sqrt{\mu(\varrho_n)}\nabla\vec{u}_n,\quad \sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n,\quad \Delta\mu(\varrho_n) \tag{7.34}$$

$$\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}},\quad \sqrt{\frac{r\theta_n\mu'(\varrho_n)}{\varrho_n}}\nabla\varrho_n, \tag{7.35}$$

$$\sqrt{\frac{\mu(\varrho_n)}{\theta_n}}\nabla\vec{u}_n,\quad \sqrt{\kappa(\varrho_n,\theta_n)}\frac{\nabla\theta_n}{\theta_n},\quad \sqrt{\frac{\eta(\varrho_n)}{\theta_n}}\mathrm{curl}\vec{B}_n \tag{7.36}$$

$$\text{bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

These bounds don't seem to be sufficient to pass to the limit in every terms, especially in the non linear ones, in the sense of distributions, so we are led to find some additional assumptions provided by compactness properties.

7.5. Auxiliary bounds

Since ϱ_n, $\vec{u}_n$ and θ_n satisfy the same bounds as in [7.2], we hope that the results proved in [7.2] are correct even in our new settings.

7.5.1. Density and velocity

For the density, we are going to check informations both near and far from vacuum.

Lemma 7.3.

$$\varrho_n^{-1/2} \text{ is uniformly bounded in } L^\infty(0,T;L^6_{loc}(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1_{loc}(\Omega)). \tag{7.37}$$

$$\varrho_n \text{ is uniformly bounded in } L^\infty(0,T;L^p_{loc}(\Omega)),\ \forall p<+\infty. \tag{7.38}$$

Proof
On the one hand, we know that $\varrho_n e_c(\varrho_n)$ is uniformly bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ which implies that $\varrho_n^{-1/2}$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^{2l}_{loc}(\Omega))$ thanks to the conditions (7.18) and (7.19). Refering to subsection 7.2.2 which suppose that $l\geq 6n-1$ with $n>2/3$, we deduce that $l>3$.
On the other hand, thanks to (7.35), let's now recall that $\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Then, thinking that $l>1>n$ and the definiton of the function ζ, we conclude that $\nabla\varrho_n^{-1/2}$ is also bounded in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$.

Concerning the bounds on positive powers of the density, we will get it through estimates on $\frac{\nabla\mu(\varrho_n)}{\sqrt{\varrho_n}}$:
For all $s \in L^1(\Omega)$ such that $s^{-1/2}\nabla\mu(s) \in L^2(\Omega)$, we have for all $p < +\infty$:

$$\|s^{m-1/2}\mathbf{1}_{s>A}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\Big(\Big\|\frac{\nabla\mu(s)}{\sqrt{s}}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|s\|_{L^1(\Omega)}^{m-1/2}\Big),$$

$$\|s^{n-1/2}\mathbf{1}_{s<A}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\Big(\Big\|\frac{\nabla\mu(s)}{\sqrt{s}}\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|s\|_{L^1(\Omega)}^{n-1/2}\Big),$$

These inequalities (proved in [7.2]) come from classical Sobolev embeddings, thinking that the 2-D case gives the continuous embedding of $H^1(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ for all $p < +\infty$. □

Lemma 7.4. *The velocity $\vec{u}_n$ is bounded in $L^{q_1}(0,T;W^{1,q_2}_{loc}(\Omega))$, with $q_1 > \frac{5}{3}$ and $q_2 > \frac{15}{8}$. Furthermore, there exists $\delta > 3$ such that $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ is bounded in $L^\delta((0,T)\times B)$ for all bounded subset B in Ω.*

Proof
Writing $\nabla\vec{u}_n = \varrho_n^{-\frac{n}{2}}\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n$, we have for all bounded subset B of Ω:

$$\begin{aligned}\|\nabla\vec{u}_n\|_{L^{q_1}(0,T;L^{q_2}(B))} &\leq C_B\Big(1 + \|\zeta(\varrho_n)^{-\frac{n}{2}}\|_{L^{2j}(0,T;L^{6j}(B))}\Big)\|\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C_B\Big(1 + \|\nabla\zeta(\varrho_n)^{-\frac{l+1-n}{2}}\|_{L^2(Q)}\Big)\|\varrho_n^{\frac{n}{2}}\nabla\vec{u}_n\|_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

where

$$j = \frac{l+1-n}{n},\ \ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2j},\ \ \frac{1}{q_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6j},$$

and we immediately deduce the first part of the lemma, thinking to estimates (7.34) and (7.35), (the conditions on q_1 and q_2 come from the conditions on l and n in paragraph 7.2.1 and 7.2.2) and even, reminding us the Sobolev embeddings in 2-D, that $\vec{u}_n$ is bounded in $L^{q_1}(0,T;L^{q_3}_{loc}(\Omega))$ with $q_1 > 5/3$ and $q_3 > 30$.
Then, taking $\alpha \in [0,1/3]$ and a bounded subset B of Ω, one can deduce from the identity

$$\varrho_n^{1/3}|\vec{u}_n| = \varrho_n^{1/3-\alpha}\varrho_n^{\alpha}|\vec{u}_n|^{2\alpha}|\vec{u}_n|^{1-2\alpha},$$

the following estimate

$$\|\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n\|_{L^s(L^r(B))} \leq \|\varrho_n\|_{L^\infty(L^p(B))}^{1/3-\alpha}\|\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n\|_{L^\infty(L^2(B))}^{2\alpha}\|\vec{u}_n\|_{L^{q_1}(L^{q_3}(B))}^{1-2\alpha},$$

where s and r are defined for all $p < +\infty$ by

$$\frac{1}{s} = \frac{1-2\alpha}{q_1},\ \ \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\Big(\frac{1}{3} - \alpha\Big) + \alpha + \frac{1-2\alpha}{q_3}.$$

The last argument consist in saying that there exists $\alpha \in [0,1/3]$ such that $r > 3$ and $s > 3$. □

7.5.2. Magnetic field

Now look at the magnetic field, we know, thanks to estimates (7.33)–(7.36) and conditions (7.14) on η that

$$\vec{B}_n \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{7.39}$$

By interpolation, we can also deduce from that embedding the following result:

Lemma 7.5. *Let α be any parameter in $(0,1)$ and $p < +\infty$.*
Then, $\vec{B}_n$ is bounded in $L^{\frac{2}{\alpha}}(0,T;L^{\frac{2}{(\frac{2}{p}-1)\alpha+1}}(\Omega))$.

7.5.3. Temperature

Lemma 7.6. *For all nondecreasing concave function f from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}$, one has*

$$\int_\Omega \frac{f'(\theta_n)}{C_v}\big(2\mu(\varrho_n)D(\vec{u}_n):D(\vec{u}_n)+\lambda(\varrho_n)|\mathrm{div}\vec{u}_n|^2\big) - \int_\Omega \kappa(\varrho_n,\theta_n)\frac{f''(\theta_n)}{C_v}|\nabla\theta_n|^2$$

$$\le \frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho_n\Big(f(\theta_n)-\log(\varrho_n/\varrho_\infty)\Big) + \int_\Omega \varrho_n|(\Gamma\theta_n f'(\theta_n)-1)\mathrm{div}\vec{u}_n|. \tag{7.40}$$

This inequality on the temperature field is obtained by multiplying (7.5) by $\frac{f'(\theta_n)}{C_v}$ and using the mass conservation equation. Now, choosing for example $f'(s)=s^{-c}$, with $c>0$ and thinking to the conditions (7.15), we also get

$$(1+\sqrt{\varrho_n})\nabla\theta_n^{\frac{a-c+1}{2}} \text{ is bounded in } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

It follows, refering to what is done in [7.2] and which is even possible to write with our new model,

Lemma 7.7. *There exists $p>1$ such that $\kappa(\varrho_n,\theta_n)\nabla\theta_n$ is bounded in*
$L^p(0,T;L^p(\Omega))$ and $\theta_n^{\frac{a-c+1}{2}}$ is bounded in $L^2(0,T;L^6(\Omega))$ for all $0<c\le 1$.

7.6. Compacity results

Uniform bounds cited paragraph 7.4.4.6 only give some weak convergences, but in order to pass to the limit when n goes to $+\infty$, we are led to prove several strong convergences especially for the nonlinear terms.

7.6.1. Using the mass conservation equation

We know, thanks to (7.38), that ϱ_n converges weakly to ϱ in $L^\infty(0,T;L^q_{loc}(\Omega))$, for all $q < +\infty$. To prove a strong compactness on the density, we shall use the transport equation satisfy by $\tilde\mu(\varrho_n)$, where $\tilde\mu(s) = s^n + s^m$:

$$\partial_t(\tilde\mu(\varrho_n)) + \mathrm{div}(\tilde\mu(\varrho_n)\vec{u}_n) + \frac{1}{2}\tilde\lambda(\varrho_n)\mathrm{div}\vec{u}_n = 0,$$

with $\tilde\lambda(s) = 2((m-1)s^m + (n-1)s^n)$.
Proving that $\partial_t(\phi\tilde\mu(\varrho_n))$ is bounded in $L^2(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ for any compactly supported function ϕ, (this point is proved in [7.2]), we then conclude

$$\varrho_n \to \varrho \text{ in } C([0,T];L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall q < +\infty. \tag{7.41}$$

From another point, to conclude to a compactness for $\varrho_n^{-1/2}$ in $C([0,T];L^q_{loc}(\Omega))$, for all $q < +\infty$, we must, in addition to (7.37), look at $\partial_t(\varrho_n^{-1/2})$ and try to show a boundedness in a space $L^r(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ with $r > 1$. From the transport equation we find

$$\partial_t(\varrho_n^{-1/2}) - \frac{3}{2}\varrho_n^{-1/2}\mathrm{div}\vec{u}_n + \mathrm{div}(\varrho_n^{-1/2}\vec{u}_n) = 0,$$

from which we can insure that $\partial_t(\varrho_n^{-1/2})$ is bounded in $L^{5/3}(0,T;W^{-1,\frac{30}{11}}(\Omega))$.
Then, from (7.37), we can deduce that

$$\begin{aligned}\varrho_n^{-1/2} \to \varrho^{-1/2} &\text{ in } L^p(0,T;L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall p < +\infty,\ \forall q < 6,\\ &\text{ in } L^2(0,T;L^q_{loc}(\Omega)),\ \forall q < +\infty.\end{aligned} \tag{7.42}$$

7.6.2. For $\varrho_n\vec{u}_n$

We know that $\varrho_n\vec{u}_n$ converges weakly to $\varrho\vec{u}$ in $L^\infty(0,T;L^{s<2}_{loc}(\Omega))$ as the product of $\sqrt{\varrho_n}$ bounded in $L^\infty(0,T;L^{r<+\infty}_{loc}(\Omega))$ and $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. To have compactness on $\varrho_n\vec{u}_n$, we will of course use the momentum equation to assure that $\partial_t(\varrho_n\vec{u}_n)$ is bounded in $L^p_{loc}(0,T;H^{-\sigma_0}(\Omega))$ for $p > 1$ and σ_0 large enough as in [7.2]. For the proof, we can see in [7.2] but, to be precise on what is different in our new system we shall not forget that we have the new term in the momentum equation related to the magnetic field, namely $\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n$. Using (7.39), we know that $\mathrm{curl}\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, that is why we must have better than $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ for $\vec{B}_n$ and it is time to use lemma 7.5. Indeed, for any $0 < \alpha < 1$ we get the expected boundedness of $\vec{B}_n$ in $L^q(0,T;L^q(\Omega))$ with $q > 2$ so that $\mathrm{curl}\vec{B}_n \wedge \vec{B}_n$ is bounded in $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ with $p > 1$. Thus, we get

$$\varrho_n\vec{u}_n \to \varrho\vec{u} \text{ in } L^p(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega)),\ \forall p < +\infty,\ \forall q < 6. \tag{7.43}$$

A first consequence, from (7.43) together with lemma 7.4, is the strong convergence of $\int_B \varrho_n|\vec{u}_n|^2$ to $\int_B \varrho|\vec{u}|^2$, for all bounded subset B in Ω. Moreover, since $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ converges weakly to $\sqrt{\varrho}\vec{u}$ in $L^\infty(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$ (coming from (7.33)), we insure that

$$\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n \to \sqrt{\varrho}\vec{u} \text{ in } L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega)). \tag{7.44}$$

To continue, writing $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n = \varrho_n^{-1/6}\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$, the preceding strong convergence with statement (7.37) suffice to show that $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ converges strongly to $\varrho^{1/3}\vec{u}$ in $L^1(0,T;L^1_{loc}(\Omega))$. Since $\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n$ is also uniformly bounded in $L^\delta(0,T;L^\delta_{loc}(\Omega))$, we deduce

$$\varrho_n^{1/3}\vec{u}_n \to \varrho^{1/3}\vec{u} \text{ in } L^3(0,T;L^3_{loc}(\Omega)). \tag{7.45}$$

7.6.3. For the magnetic field $\vec{B}_n$

We already know that the sequence $\vec{B}_n$ weakly converges to the limit $\vec{B}$ in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Let's now deal with $\partial_t\vec{B}_n$ in order to insure a strong convergence statement. Looking at equation (7.3), we are led to bound $\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n$ and $\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n$.
For the first one, thinking to lemma 7.4 and lemma 7.5, we get $\vec{u}_n \wedge \vec{B}_n$ bounded in $L^p_{loc}(0,T;L^p(\Omega))$ with $p>1$ what is enough comfortable.
For the second, we write $\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n = \sqrt{\eta(\varrho_n)}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n$. We know that the term $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and through conditions (7.14) and bounds (7.37) or (7.38), we also have $\sqrt{\eta(\varrho_n)}$ bounded in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$.
This is just enough to conclude that $\vec{B}_n$ is bounded in $L^1(0,T;W^{-1,1}_{loc}(\Omega))$. Then using Corollary 6 of [7.12], we get

$$\vec{B}_n \to \vec{B} \text{ in } L^p(0,T;L^2(\Omega)),\ \forall p < +\infty \tag{7.46}$$

7.6.4. For the temperature θ_n

We want to copy the method exposed in [7.2] but our new equation (7.20) on the specific total energy E_n present two added terms which are quite cumbersome to proceed exactly as in [7.2]. That is why we have written another equivalent equation (7.21), because this new one is conservative. And we are going to transport here the role of E_n on $\tilde{E}_n$. So let's show a strong convergence on $\varrho_n\tilde{E}_n$ instead of $\varrho_n E_n$. We know that $\varrho_n\tilde{E}_n$ is bounded in $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ by (7.24) and we want to show an adapted boundedness on $\partial_t(\varrho_n\tilde{E}_n)$ to insure compacity. We will just explain why our two new terms $\mathrm{div}\big(\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n\big)$ and $\mathrm{div}\big((\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n)\wedge\vec{B}_n\big)$ are bounded in $L^q_{loc}(0,T;W^{-1,q}_{loc}(\Omega))$, $q\geq 1$.
For that, we begin to write

$$\eta(\varrho_n)\mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n = \sqrt{\eta(\varrho_n)}\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n.$$

Since $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\mathrm{curl}\vec{B}_n$ is bounded in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ by (7.34), let's now deal with the quantity $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\vec{B}_n$. We know that $\vec{B}_n$ and $\sqrt{\eta(\varrho_n)}$ are respectively bounded in the space $L^2(0,T;L^{r<+\infty}(\Omega))$ (by (7.39)) and $L^\infty(0,T;L^s_{loc}(\Omega))$ for some $s>2$ (thinking to (7.38) and conditions (7.14)).
Next, for the second term, let's put together the boundednesses of lemma 7.4 (which says that $\vec{u}_n$ is bounded in $L^{5/3}(0,T;L^{30}_{loc}(\Omega))$) and lemma 7.5 with the choice $\alpha\in]\frac{1}{15},\frac{2}{5}[$ (which

implies the boundedness of $\vec{B}_n$ in $L^p(0,T;L^q(\Omega))$, $p>5$, $q>15/7$). We are now able to assert that

$$\varrho_n\tilde{E}_n \to \varrho\tilde{E} \text{ in } C([0,T];H^{-\sigma_0}(\Omega)), \text{ for } \sigma_0 \text{ large enough.}$$

Going back over what is done in [7.2], we can deduce from that the other strong convergences that we recall now :

Lemma 7.8.

$$\sqrt{\varrho_n}\theta_n \to \sqrt{\varrho}\theta \text{ in } L^2_{loc}(0,T;L^2_{loc}(\Omega)),$$

and for $p<a$ *if* $a>2$, $p=a$ *if* $a=2$ *and* $q<+\infty$,

$$\theta_n \to \theta \text{ in } L^p_{loc}(0,T;L^q_{loc}(\Omega)).$$

7.7. Convergences

For the mass conservation equation, all is said in [7.2], we can recall the strong convergence of ϱ_n to ϱ in $C([0,T];L^2(\Omega))$ and the strong convergence of $\sqrt{\varrho_n}\vec{u}_n$ to $\sqrt{\varrho}\vec{u}$ in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$.
For the momentum equation, we just have to justify how to pass to the limit in the term $\text{curl}\vec{B}_n\wedge\vec{B}_n$. For that we should have a strong convergence of $\vec{B}_n$ to $\vec{B}$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, which is given by (7.46).
Now is the time to deal with the magnetic field equation (7.3). It is clear for the term $\partial_t\vec{B}_n$, now let's deal with $\text{curl}(\vec{u}_n\wedge\vec{B}_n)$ and $\text{curl}(\eta(\varrho_n)\text{curl}\vec{B}_n)$.
With lemma 7.4 and (7.46), we justify the convergence in the sense of distributions for the first one. The second one can be, one more time, written as the product of $\sqrt{\eta(\varrho_n)}\text{curl}\vec{B}_n$, weakly converging in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ and $\sqrt{\eta(\varrho_n)}$ strongly converging to $\sqrt{\eta(\varrho)}$ in $L^2(0,T;L^2_{loc}(\Omega))$ thanks to the compactness results of subsection 7.6.1 and conditions (7.14) satisfied by the resistivity η.

References

[7.1] D. Bresch, B. Desjardins, On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Math. Pures et Appliquées,* (9) 87, no.1, 57–90, (2007).

[7.2] D. Bresch, B. Desjardins, Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressibles complètes avec conduction thermique. *C. R. Acad. Sci.,* Paris, Section mathématiques, vol.343, issue 3, 219–224, (2006).

[7.3] D. Bresch, B. Desjardins, On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Maths pures et appliquées,* **86**, (2006), 362–368.

[7.4] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Maths pures et appliquées,* (9) 87, no. 2, 227–235, (2007).

[7.5] D. Bresch, B. Desjardins, G. Métivier, Recent mathematical results and open problems about Shallow Water equations. *Analysis and Simulation of Fluid Dynamics in the series Advances in Mathematical Fluid Mechanics (eds C. Calgero, J.–F. Coulombel, T. Goudon),* (2006).

[7.6] E. Feireisl, *Mathematics of viscous, compressible, and heat conducting fluids.* Nonlinear partial differential equations and related analysis, 133–151, Contemp. Math., 371, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[7.7] J.–F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford University Press, (2006).

[7.8] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.1,* Oxford University Press, (1996).

[7.9] P.–L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.2,* Oxford University Press, (1998).

[7.10] A. Mellet, A. Vasseur, On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. partial differential equations,* 32, no. 1-3, 431–452, (2007).

[7.11] D. Serre, Entropie du mélange liquide-vapeur d'un fluide thermocapillaire *Archiv. Ration. Mech. Anal. (128) Vol. 1 p. 33–73,* (1994).

[7.12] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CXLVI, pp.65–96, (1987).

Chapter VIII

Instability related to compressible Korteweg system

Accepted for publication: D. Bresch, B. Desjardins, M. Gisclon, R. Sart, Instability results to compressible Korteweg system, *Annali dell' Universita' di Ferrara sez. VII,* (2007).

abstract

This paper presents the study of surface tension effects in compressible mixtures in the framework of diffuse interface models. In the first part, we describe results previously obtained on the so–called compressible Korteweg and shallow water models and we present nonlinear stability using energy estimates and a new entropy equality recently discovered. These diffuse interface models also allow to take account of capillarity effects in turbulent mixtures and plasma flows subject to Rayleigh-Taylor instabilities. The aim of the last part is to study the influence of surface tension on this instability phenomena. More precisely we look at the expression of the growth rate under a small perturbation of wave number k. We prove that for an appropriate choice of the capillary number σ in terms on the surface tension coefficient T_s (that means particular pressure laws), we find the same expression as for the two incompressible fluids model with surface tension coefficient on a sharp interface studied for instance by S. Chandrasekhar [Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Dover Publications, Inc. New York, (1981)].

8.1. Introduction

In various applications, hydrodynamic instabilities can be observed at the interface between different materials. A refined description of the mixture dynamics by numerical codes is necessary in order to predict and reproduce experiments [8.15]. In previous papers, we analyzed the stability and well posedness properties of diffuse interface models used to catch the effect of surface tension in a transition zone of finite extension: Korteweg and Shallow water type models, see [8.7] and [8.8].

In order to describe the zone separating two fluids of different properties, various points of view may be adopted:
— A microscopic viewpoint, in which a transition zone of finite extension exists between the two fluids, where the gradient of physical variables are large. Diffusion effect at the molecular level has to be considered.
— A mesoscopic viewpoint, in which the fluids are separated by a zero thickness layer, called "interface". Most of the physics in the layer is contained in suitable boundary conditions.
— A macroscopic viewpoint, where only large scale effects are represented in a transition zone (diffuse interface) containing simultaneously the two fluids.
The instabilities are made of a combination of three basic type instabilities: Kelvin–Helmholtz (induced by shear stress), Richtmyer–Meshkhov (induced by a shock at the interface), and Rayleigh-Taylor (which appears when the gravity and the density gradient are in the opposite sense).
We will describe in this paper a surface tension model published in other physical papers in the context of compressible turbulent mixtures [8.15] and we will give various mathematical properties. Such a model corresponds to the third description of free boundary interface problem, see for instance [8.1]. In a first part, we will explain the results obtained in two recent papers regarding the well posedness and energetical consistency of the model. In the second part, we will establish some properties concerning the influence of surface tension on some instabilities phenomena.
These modeling approach of surface tension, which includes a third order derivative term with respect to the density, has good properties in some applications in liquid water-steam mixtures (for instance with respect to the "sharp interface" limit), but has not been studied in the presence of strong amplitude shocks.
We analyze here the influence of the surface tension term on the growth rate of instabilities. We prove that until the first order expansion w.r.t. the wave number, surface tension does not appear in the asymptotic expansion. We follow the lines of the paper [8.12] where a similar problem has been addressed without surface tension effects. We formally generalize then the Rayleigh equation to the capillary case and establish an asymptotic expansion of the eigenvalue and the eigenvector. Then we put emphasis on the importance of the diffusive term when surface tension is taken into account. We obtain the linear stability and the nonlinear stability for some range regarding surface tension and some other hypothesis. Let us note some experiments in microgravity, where viscosity and surface tension are present, *cf.* [8.23] and [8.24]. In [8.23], [8.24], Rayleigh Taylor instabilities are investigated in the case of two fluids with finite thickness including the effects of viscosity and surface tension terms. The system consists in two horizontal layers of inhomogeneous incompressible fluids of thickness t_1 and t_2 with surface tension T_s at the interface, under the influence of a gravity field of amplitude g, directed from the heavy fluid of density ϱ_2 to the light fluid of density ϱ_1. See also [8.22]. A small perturbation of wave number k at the two fluid interface increases exponentially in time in the linear regime with a growth rate γ given by

$$\frac{\gamma^2}{gk} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1 - k^2 T_s/g}{\varrho_2 \coth(kt_2) + \varrho_1 \coth(kt_1)}.$$

Remark that letting t_1 and t_2 respectively go to $-\infty$, $+\infty$, we get the standard expression that we can find for instance in [8.10]

$$\frac{\gamma^2}{gk} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1 - k^2 T_s/g}{\varrho_2 + \varrho_1} = A - \frac{T_s}{g(\varrho_2 + \varrho_1)} k^2 \tag{8.1}$$

where A is called the Atwood number. As we shall see, it turns out that in case of the Korteweg model, the influence of surface tension on the growth rate γ arises at the same order as in (8.1). This kind of result where surface tension is found at order 3 in k has been found too in [8.9] in the framework of Richtmyer–Meshkov instabilities at the interface between two incompressible viscous fluids with surface tension. Readers interested by mathematical problems for miscible incompressible fluids with Korteweg stresses is referred to [8.16]. For hydrodynamical stability results see is [8.10] and [8.20] for justified mathematical results regarding asymptotic methods for the Rayleigh equation for the linearized Rayleigh-Taylor instability.

8.2. The Korteweg compressible model

In previous mathematical papers, see [8.7] and [8.8], we have established some mathematical properties of plasma junction models very similar to Korteweg type models.
The aim of the two preceding papers was to look at the well posedness of diffuse interface models such as the Korteweg model. The basic hypothesis derived from the mean field theory, is that the volumic free energy F of the system depends not only on the temperature θ and density ϱ, but also on its gradient $\nabla\varrho$, in a quadratic manner

$$F(\varrho, \nabla\varrho, \theta) = F_0(\varrho, \theta) + \frac{\sigma}{2}|\nabla\varrho|^2,$$

where F_0 corresponds to the free energy per unit volume of the homogeneous material, and σ is the capillarity coefficient of the system.
The thermodynamic and conservation principles allow then to deduce the following model from the expression of F :

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\partial_t(\varrho\mathbf{u}) + \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathrm{div}(S + K) + \varrho\mathbf{f},$$

$$\partial_t\big(\varrho(e + |\mathbf{u}|^2/2) + \frac{\sigma}{2}|\nabla\varrho|^2\big) + \mathrm{div}\big(\varrho\mathbf{u}(e + |\mathbf{u}|^2/2)\big) = \mathrm{div}(\alpha\nabla\theta) + \mathrm{div}\big((S+K)\cdot\mathbf{u}\big) + \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u},$$

where $\mathbf{u}$ and ϱ respectively denote the velocity and density of the fluid, e the specific internal energy, θ is the temperature, S the stress tensor, K the capillary tensor and $\mathbf{f}$ the external bulk forces. The stress tensor S is given by

$$S_{ij} = \big(\lambda\,\mathrm{div}\mathbf{u} - P(\varrho, \theta)\big)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{u}),$$

with μ and λ the viscosities, $D(\mathbf{u})$ the strain tensor and P the pressure; the capillary tensor K is expressed as follows

$$K_{ij} = \frac{\sigma}{2}(\Delta\varrho^2 - |\nabla\varrho|^2)\delta_{ij} - \sigma\partial_i\varrho\partial_j\varrho.$$

When a barotropic assumption can be made (for instance in the isothermal or in the isentropic case), then the Korteweg model, in absence of forces, reads as

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{8.2}$$

$$\partial_t(\varrho u) + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - 2\nu \mathrm{div}(\varrho D(\mathbf{u})) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla P(\varrho) = 0. \tag{8.3}$$

In the previous work [8.7], we proved the existence for all times of weak solutions for the above model in the case of barotropic equation of state, i.e. the pressure P only depends on the density ϱ. This corresponds to a global in time stability result with respect to perturbations of the initial data $(\varrho_0, \varrho_0 u_0)$. This stability result assumes that the viscosity μ is a linear function of the density ϱ : $\mu = \nu \varrho$ (for some positive constant ν). Even though the parabolic system obtained on the velocity u degenerates when ϱ tends to 0, this viscous model allows to get some extra conservation law on a velocity $\mathbf{v}$ characterizing the heterogeneities $\mathbf{v} = \nu \nabla \log \varrho$, that means the space variability of the density.

In the article [8.8], we studied the viscous shallow water model, which is obtained from the incompressible Navier–Stokes model with free surface in presence of surface tension, in the limit of large wavelengths. The shallow water model captures at large scale the effects of surface tension, which writes as a tensor of the form (1).
This study showed the crucial importance of drag forces on the stability properties. Drag forces, in the Stokes regime, (proportional to $\mathbf{u}$), or in the Newton – turbulent – regime (proportional to $\mathbf{u}|\mathbf{u}|$), allow to control the oscillations of the solutions when the density gets close to zero.
The reader interested by recent mathematical results on the homogeneous incompressible Navier–Stokes equations with free surface is referred to [8.13] and to [8.18] for inhomogeneous flows. See also [8.15] for results on the retraction of viscous films in one dimension in space.

8.3. Stability using energy estimates with surface tension and viscosity

8.3.1. Linear stability

We prove that the system (8.2)-(8.3) is linearly stable around a constant reference state

$$(\varrho_{ref}, u_{ref}) = (\bar{\varrho}, 0),$$

provided some condition involving the pressure law and the surface tension is satisfied. For simplicity, we take $\lambda = 0$. The space domain Ω is assumed to be a periodic box $(0, 2\pi L)^d$. Linearizing around the constant state $(\bar{\varrho}, 0)$ ($\bar{\varrho} > 0$), the density and velocity perturbations are still denoted $(\varrho, \mathbf{u})$. Using Laplace transform in time, and denoting α the time coefficient, we get

$$\alpha \varrho + \bar{\varrho} \mathrm{div} \mathbf{u} = 0, \tag{8.4}$$

$$\alpha \mathbf{u} - 2\nu \mathrm{div} D(\mathbf{u}) - \sigma \nabla \Delta \varrho + \frac{P'(\bar\varrho)}{\bar\varrho} \nabla \varrho = 0. \tag{8.5}$$

Then we prove that we get linear stability for σ large enough, more precisely, if we assume $P'(\bar\varrho)L^2 \geq -\bar\varrho\sigma$.
Let us multiply (8.4) by the conjugate ϱ^* of ϱ. We get

$$\alpha \int_\Omega |\varrho|^2 + \bar\varrho \int_\Omega \varrho^* \mathrm{div}\mathbf{u} = 0.$$

We multiply now the conjugate of (8.5) by $\mathbf{u}$, we get

$$\alpha \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 + 2\nu \int_\Omega |D(\mathbf{u})|^2 + \sigma \int_\Omega \Delta \varrho^* \, \mathrm{div}\mathbf{u} - \int_\Omega \frac{P'(\bar\varrho)}{\bar\varrho} \varrho^* \mathrm{div}\mathbf{u} = 0.$$

Multiplying now Equation (8.4) by $\Delta\varrho^*$, this gives

$$-\alpha \int_\Omega |\nabla\varrho|^2 + \bar\varrho \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{u}\, \Delta \varrho^* = 0.$$

The three previous equalities give

$$\alpha \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 + 2\nu \int_\Omega |D(\mathbf{u})|^2 + \alpha \frac{\sigma}{\bar\varrho} \int_\Omega |\nabla\varrho|^2 + \alpha \frac{P'(\bar\varrho)}{\bar\varrho^2} \int_\Omega |\varrho|^2 = 0.$$

Then we have

$$\alpha = \frac{-\nu \displaystyle\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 - \nu \int_\Omega |\mathrm{div}\mathbf{u}|^2}{\displaystyle\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 + \frac{\sigma}{\bar\varrho} \int_\Omega |\nabla\varrho|^2 + \frac{P'(\bar\varrho)}{\bar\varrho^2} \int_\Omega |\varrho|^2}.$$

Using the Poincare–Wirtinger Inequality (note that $\int_\Omega \varrho = 0$ and $\int_\Omega \mathbf{u} = 0$), we get the linear stability if

$$\frac{P'(\bar\varrho)L^2}{\bar\varrho\sigma} \geq -1.$$

In other words, we remark that in the case where $P(\varrho) = \bar P(\varrho/\bar\varrho)^\delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, we get the linear stability condition $\sigma \geq -\delta L^2 \bar P/\bar\varrho^2$. Remark that pressure may satisfy such constraints, see for instance [8.2].

8.3.2. Nonlinear stability

We will prove in this part that the presence of viscosity and surface tension allow to obtain the exponential stability if ϱ is assumed to be uniformly bounded from below and from above.
We begin by a classical monotone stability result

Monotone stability

Using the direct energy inequality, we get the monotonic stability without any hypothesis on the data, assuming $\sigma > 0$. Indeed

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \Pi(\varrho) + \frac{\sigma}{2}|\nabla\varrho|^2\Big) \leq -\int_\Omega \nu\varrho|D(\mathbf{u})|^2$$

where

$$\Pi(s) = s\int_0^s \frac{P(\tau)}{\tau^2}d\tau \geq 0.$$

Let us prove that System (8.2)-(8.3) is monotonically stable if $\Pi''(s) \geq -\sigma/L^2$.
From [8.7],we also have the following inequality

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}+\nu\nabla\log\varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma|\nabla\varrho|^2\Big)$$

$$\leq -\nu\int_\Omega \frac{P'(\varrho)}{\varrho}|\nabla\varrho|^2 - \nu\sigma\int_\Omega |\Delta\varrho|^2.$$

We remark that $s\Pi''(s) = P'(s)$ then if we assume $\Pi''(s) \geq -\sigma/L^2$, then the system is monotonically stable for a norm involving a space derivative for ϱ.
Let us remark that without surface tension we would have to assume $\Pi''(s) \geq 0$ that means a convex potential. The presence of surface tension allow to consider some transition zones. See [8.2] for some forms of $P(\varrho)$ such as the Van der Waals equation of state.

Exponential stability

We will look at the nonlinear stability around $(\bar{\varrho}, 0)$. We prove that if we assume $\nu > 0$, $c_1 \leq \varrho \leq c_2$ and $\Pi''(s) > -\sigma/L^2$, then the basic motion is exponentially stable.
We have

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(\varrho|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}+\nu\nabla\log\varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma|\nabla\varrho|^2\Big)$$

$$\leq -\nu\int_\Omega \frac{P'(\varrho)}{\varrho}|\nabla\varrho|^2 - \nu\sigma|\nabla\nabla\varrho|^2 - \nu\int_\Omega \varrho|\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Thus if $0 < c_1 \leq \varrho \leq c_2$ and if $\Pi''(s) > -\sigma/L^2$, then we get the exponential stability of the model without restrictions of the size of the data. This allows to look at the nonlinear stability of the model given in [8.15]. Let us note that the norm

$$\int_\Omega \Big(\varrho|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}+\nu\nabla\log\varrho|^2 + 2\Pi(\varrho) + \sigma|\nabla\varrho|^2\Big)$$

is equivalent to the norm

$$\int_\Omega \Big(|\mathbf{u}|^2 + |\varrho|^2 + |\nabla\varrho|^2\Big)$$

if ϱ is assumed to be uniformly bounded from above and from below. The reader interested in nonlinear stability of the rest state as basic solution to the full incompressible nonlinear Korteweg model is referred to [8.17].

8.4. Rayleigh-Taylor stability

In this part, we study the influence of the surface tension coefficient on the growth rate of Rayleigh-Taylor instabilities. The gravity field $\mathbf{g}$ is assumed to be constant and directed along the z coordinate $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ for some positive acceleration g . Again, we restrict to the case of barotropic equations of state for simplicity. We consider an inviscid model and we show that the effect of surface tension may be seen only at the order 3 with respect to the wave number k. This result is similar to the one obtained in [8.24] on a superposition of two fluids with different densities. In addition, we prove that in the presence of viscosity, an exponential stability result can be obtained under the assumption of lower and upper bounds for the density.

8.4.1. Linear instability result

In this part, we will study the effect of the presence of surface tension term on the instability growth rate of Rayleigh-Taylor type. More precisely, looking at perturbations around $(0, p^0, \varrho^0)$ (to be specified later on) under the form

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx + \gamma t), \qquad \varphi = \varrho, u, w, p,$$

we prove that the growth rate γ satisfies the following expansion

$$\frac{gk}{\gamma^2} \approx \lambda_0 + k\lambda_1 + k^2\lambda_2,$$

where λ_0, λ_1 and λ_2 are given by

$$\lambda_0 = \frac{\varrho_D^0 + \varrho_U^0}{\varrho_U^0 - \varrho_D^0} = A^{-1}.$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - A^2}{2A^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 - (\varrho^0 - 1)^2}{\varrho^0} dz.$$

$$\lambda_2 = \frac{\widetilde{\sigma}\lambda_0}{2A} \left[\begin{array}{l} (\lambda_0 + 1) \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 dz + \lambda_0 (\lambda_0 - 1) \int_0^{+\infty} \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 + A))}{\varrho^0} dz \\ -(\lambda_0 - 1) \displaystyle\int_{-\infty}^0 \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 dz + \lambda_0 (\lambda_0 + 1) \int_{-\infty}^0 \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 - A))}{\varrho^0} dz \end{array} \right]$$

$$+ \frac{\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0^2 - 1)}{2} \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 + A))}{(\varrho^0)^2} (1 - \lambda_0) dz - \int_0^{+\infty} \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{1}{\varrho^0} dz \\ - \displaystyle\int_{-\infty}^0 \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{(\varrho^0 - (1 - A))}{(\varrho^0)^2} (\lambda_0 + 1) dz + \int_{-\infty}^0 \left|\frac{d\varrho^0}{dz}\right|^2 \frac{1}{\varrho^0} dz \end{array} \right] + \lambda_2^{\sigma=0}.$$

Remark that since we are interested in the surface tension coefficient on the growth rate, only the terms depending on it are given here for λ_2. The expression of $\lambda_2^{\sigma=0}$ is given later on.

We assume that the density, the velocity $\mathbf{u} = (u, v, w)$ and the pressure p, function of the density ϱ satisfy

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0,$$
$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \mathrm{div}(\varrho \nabla u) - \sigma \varrho \nabla \Delta \varrho + \nabla p = \varrho \mathbf{g}. \tag{8.6}$$

We remark that the diffusive term is a degenerate one as in [8.8], ($\mu(\varrho) = \nu \varrho$, $\lambda(\varrho) = 0$). More general viscosities may be chosen without extra difficulties. Let us consider the hydrostatic profile ϱ^0, p^0 associated with $\mathbf{u}^0 \equiv 0$ such that

$$\nabla p^0 = \sigma \varrho^0 \nabla \Delta \varrho^0 + \varrho^0 \mathbf{g}, \tag{8.7}$$

which writes as an ordinary differential equation on ϱ^0 in z. See for instance [8.2] for such density profiles. This relation is linked to the Maxwell equilibrium points. We consider incompressible perturbations of the basic flow $(0, p^0, \varrho^0)$. Let us note that the study of weak stability associated with System (8.6) has been achieved in [8.2], [8.3] for $u_0 \neq 0$. Extensions of our results to nonvanishing initial velocity profile and/or compressible perturbation could be an interesting open problem. Here we consider a 2D incompressible perturbation.

8.4.2. Proof of growth rate ansatz

The perturbed density ϱ^1, the velocity $\mathbf{u}^1 = (u^1, 0, w^1)$ and the pressure p^1 satisfy the following equations

$$\partial_t \varrho^1 + \frac{d\varrho^0}{dz} w^1 = 0,$$
$$\partial_t u^1 + \frac{1}{\varrho^0}\partial_x p^1 = \sigma \partial_x^3 \varrho^1 + \sigma \partial_x \partial_z^2 \varrho^1 + \nu \partial_x^2 u^1 + \frac{\nu}{\varrho^0}\partial_z(\varrho^0 \partial_z u^1),$$
$$\partial_t w^1 + \frac{1}{\varrho^0}\partial_z p^1 = \sigma \partial_x^2 \partial_z \varrho^1 + \sigma \partial_z^3 \varrho^1$$
$$+\sigma \frac{\varrho^1}{\varrho^0}\frac{d^3\varrho^0}{dz^3} - \frac{\varrho^1}{\varrho^0} g + \nu \partial_x^2 w^1 + \frac{\nu}{\varrho^0}\partial_z(\varrho^0 \partial_z w^1),$$
$$\partial_x u^1 + \partial_z w^1 = 0.$$

Let us forget the indices 1 and look for solutions of normal mode type, namely

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(z) \exp(ikx + \gamma t), \qquad \varphi = \varrho, u, w, p,$$

where the wave number k is considered as a parameter. This gives the following system

$$\gamma \varrho + \frac{d\varrho^0}{dz} w = 0,$$

$$\gamma u + \frac{ik}{\varrho^0} p = -ik^3 \sigma \varrho + ik\sigma \frac{d^2 \varrho}{dz^2} - \nu k^2 u + \frac{\nu}{\varrho^0}\frac{d}{dz}(\varrho^0 \frac{d}{dz} u), \tag{8.8}$$

$$\gamma w + \frac{1}{\varrho^0}\frac{dp}{dz} = -k^2\sigma\frac{d\varrho}{dz} + \sigma\frac{d^3\varrho}{dz^3} + \sigma\frac{\varrho}{\varrho^0}\frac{d^3\varrho^0}{dz^3} - \frac{\varrho}{\varrho^0}g - \nu k^2 w + \frac{\nu}{\varrho^0}\frac{d}{dz}(\varrho^0\frac{d}{dz}w),$$

$$iku + \frac{dw}{dz} = 0.$$

By following the steps given in [8.12] that means by rewriting the equation under a non dimensional form and denoting $\varepsilon = k\ell$, it is easy to see that we can write the system as a modified Rayleigh equation.

More precisely, we prove that if ϱ, u, w, p is solution of (8.8) then the following Rayleigh equation is satisfied for the vertical component of the velocity

$$\frac{\nu}{\gamma l^2}\frac{d^2}{dz^2}(\varrho^0\frac{d^2}{dz^2}w) - \frac{d}{dz}\Big[\Big((1+\frac{2\nu\varepsilon^2}{\gamma\ell^2})\varrho^0 + \frac{\sigma\varepsilon^2\overline{\varrho}}{\gamma^2\ell^4}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\frac{dw}{dz}\Big] \tag{8.9}$$

$$+\varepsilon^2\Big((1+\frac{\nu\varepsilon^2}{\gamma\ell^2})\varrho^0 + \frac{\sigma\varepsilon^2\overline{\varrho}}{\gamma^2\ell^4}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)w = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2\ell}\frac{d\varrho^0}{dz}gw.$$

Note that the modified Rayleigh equation, in its dimensional form, may be written in a form similar to Equation (19) in [8.1] where the following frequency N and velocity M were introduced

$$N^2 = -\frac{g}{\varrho^0}\frac{d\varrho^0}{dz}, \qquad M^2 = \frac{\sigma}{\varrho^0}\Big(\frac{d\varrho^0}{dz}\Big)^2.$$

Asymptotic limit. Let us now assume that $\nu = 0$ and perform the asymptotic analysis when ε goes to 0. We note $\lambda^\varepsilon = \varepsilon g/\gamma^2\ell$. Then, Equation (8.9) rewrites as

$$-\frac{d}{dz}\Big[\Big(\varrho^0 + \frac{\sigma\varepsilon\lambda^\varepsilon\overline{\varrho}}{g\ell^3}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\frac{dw}{dz}\Big]$$

$$+\varepsilon^2(\varrho^0 + \frac{\sigma\varepsilon\lambda^\varepsilon\overline{\varrho}}{g\ell^3}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2)w = \varepsilon\,\lambda^\varepsilon\frac{d\varrho^0}{dz}w. \tag{8.10}$$

Assume now that the typical size of the interface scales as ε and that the density profile connects two constant states at infinity ($\varrho_U/\overline{\varrho}$ for positive z and $\varrho_D/\overline{\varrho}$ for negative z). We note

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma\overline{\varrho}}{\ell^3 g}.$$

Let us consider $\varrho^0(z) = \widetilde{\varrho}^0(z/\varepsilon)$ and $w(z) = \widetilde{w}(z/\varepsilon)$ Then, the above equation reads

$$-\frac{d}{dz}\Big[\Big(\widetilde{\varrho}^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon^3\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\widetilde{\varrho}^0}{dz}\Big|^2\Big)\frac{d\widetilde{w}}{dz}\Big] \tag{8.11}$$

$$+\Big(\widetilde{\varrho}^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon^3\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\widetilde{\varrho}^0}{dz}\Big|^2\Big)\widetilde{w} = \lambda^\varepsilon\frac{d\widetilde{\varrho}^0}{dz}\widetilde{w}.$$

Taking the sharp interface limit in the weak formulation associated with (8.9) as in [8.12], we get

$$-\frac{d}{dz}\Big(\widetilde{\varrho}^0_*\frac{d\widetilde{w}_*}{dz}\Big) + \widetilde{\varrho}^0_*\widetilde{w}_* - \lambda_0\frac{d\widetilde{\varrho}^0_*}{dz}\widetilde{w}_* = 0,$$

where $\widetilde{\varrho}_*^0 = \varrho_D^0/\overline{\varrho}$ if $z < 0$ and $\widetilde{\varrho}_*^0 = \varrho_U^0/\overline{\varrho}$ elsewhere with $\varrho_U^0 > \varrho_D^0$. This yields the expression on $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\widetilde{w}_*(z) = \widetilde{w}_*(0)\exp(-|z|),$$

and

$$\Big[\varrho_U^0 \frac{d\widetilde{w}_*(0^+)}{dz} - \varrho_D^0 \frac{d\widetilde{w}_*}{dz}(0^-)\Big] + \lambda_0(\varrho_U^0 - \varrho_D^0)\widetilde{w}_*(0) = 0,$$

and then, we get the well known expression of λ_0

$$\lambda_0 = \frac{\varrho_D^0 + \varrho_U^0}{\varrho_U^0 - \varrho_D^0} = A^{-1}.$$

Ansatz. In the following we choose the characteristic density scale equal to

$$\overline{\varrho} = (\varrho_U^0 + \varrho_D^0)/2,$$

thus the non dimensional density connects two constants states at infinity ($1 + A = \varrho_U^0/\overline{\varrho}$ for positive z and $1 - A = \varrho_D^0/\overline{\varrho}$ for negative z). Let us rewrite equation (8.10) in terms of a^ε where

$$w^\varepsilon(z) = a^\varepsilon(z)\exp(-\varepsilon|z|).$$

We get for $z > 0$

$$-\frac{d}{dz}\Big[\Big(\varrho^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\frac{da^\varepsilon}{dz}\Big] + 2\varepsilon\frac{d}{dz}\Big[\Big(\varrho^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a^\varepsilon\Big] \tag{8.12}$$

$$= \varepsilon(\lambda^\varepsilon + 1)\frac{d\varrho^0}{dz}a^\varepsilon + \widetilde{\sigma}\lambda^\varepsilon\varepsilon^2\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a^\varepsilon,$$

and for $z < 0$

$$-\frac{d}{dz}\Big[\Big(\varrho^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\frac{da^\varepsilon}{dz}\Big] - 2\varepsilon\frac{d}{dz}\Big[\Big(\varrho^0 + \widetilde{\sigma}\varepsilon\lambda^\varepsilon\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a^\varepsilon\Big] \tag{8.13}$$

$$= \varepsilon(\lambda^\varepsilon - 1)\frac{d\varrho^0}{dz}a^\varepsilon - \widetilde{\sigma}\lambda^\varepsilon\varepsilon^2\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a^\varepsilon.$$

Then we use a formal asymptotic expansion of the pair $(\lambda^\varepsilon, a^\varepsilon)$ under the form

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots,$$

$$a^\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \cdots.$$

and we will prove that

$$\lambda_0 = A^{-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - A^2}{2A^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2 - (\varrho^0 - 1)^2}{\varrho^0}dz. \tag{8.14}$$

That means that λ_0 and λ_1 do not depend on σ except by ϱ^0.
To derive such expressions, we follow the lines given in [8.12] plugging the Ansatz in (8.12) and (8.13) and identifying the powers. We get, for $z > 0$

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_0}{dz}\Big) = 0,$$

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_1}{dz}\Big) + \widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_0}{dz}\Big) - 2\frac{d}{dz}(\varrho^0 a_0) = -(\lambda_0+1)\frac{d\varrho^0}{dz}a_0,$$

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_2}{dz}\Big) + \widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_0}{dz}\Big) + \widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big) - 2\frac{d}{dz}(\varrho^0 a_1)$$

$$-2\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 a_0\Big) = -(\lambda_0+1)\frac{d\varrho^0}{dz}a_1 - \lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}a_0 - \widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_0.$$

As in [8.12], this gives, asking for da_1/dz to tend to zero at $+\infty$

$$a_0(z) = a_{0,U}, \qquad z > 0$$

$$a_1(z) = a_{1,U} + (\lambda_0 - 1)a_{0,U}\int_z^{+\infty}\frac{(\varrho^0 - (1+A))}{\varrho^0}dz, \qquad z > 0.$$

On the lower part, one has similarly

$$a_0(z) = a_{0,D}, \qquad z < 0$$

$$a_1(z) = a_{1,D} - (\lambda_0 + 1)a_{0,D}\int_{-\infty}^{z}\frac{(\varrho^0 - (1-A))}{\varrho^0}dz, \qquad z < 0.$$

Let us look at the second order of the Ansatz, that means a_2. We get

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_2}{dz}\Big) + \widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big) - 2\frac{d}{dz}(\varrho^0 a_1)$$

$$= -(\lambda_0+1)\frac{d\varrho^0}{dz}a_1 - \lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}a_0 + \widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_0.$$

By integrating from z to $+\infty$, we obtain

$$-\varrho^0\frac{da_2}{dz} - \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz} + 2\varrho^0 a_1 - 2(1+A)a_{1,U} =$$

$$-(\lambda_0+1)\int_z^{+\infty}\frac{d(\varrho^0 a_1)}{dz}dz + (\lambda_0+1)\int_z^{+\infty}\varrho^0\frac{da_1}{dz}dz - \lambda_1((1+A)-\varrho^0)a_{0,U} - \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 a_{0,U}.$$

By using the expression of a_1, this may be written, for $z > 0$:

$$-\varrho^0\frac{da_2}{dz} - \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz} = -(\lambda_0-1)((1+A)a_{1,U} - \varrho^0 a_1) \tag{8.15}$$

$$+(1-\lambda_0^2)\int_z^{+\infty} a_{0,U}(\varrho^0-(1+A))dz' - \lambda_1((1+A)-\varrho^0)a_{0,U} - \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 a_{0,U}.$$

At the lower part, that means $z<0$:

$$\varrho^0\frac{da_2}{dz} + \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz} = -(\lambda_0+1)(\varrho^0 a_1 - (1-A)a_{1,D}) \tag{8.16}$$

$$-(\lambda_0^2-1)\int_{-\infty}^{z} a_{0,D}(\varrho^0-(1-A))dz' - \lambda_1(\varrho^0-(1-A))a_{0,D} - \widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 a_{0,D}.$$

Now we use the continuity of the normal stress across the interface at order one in ε

$$\frac{da_2}{dz}(0^+) - \frac{da_2}{dz}(0^-) = 2a_1(0),$$

and the continuity of the vertical component of the velocity

$$a_0(0^+) = a_0(0^-) = a_0(0),$$

$$a_{1,U} - a_{1,D} = a_0\Big((-\lambda_0+1)\int_0^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}\,dz - (\lambda_0+1)\int_{-\infty}^{0}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}\,dz\Big)$$

By rewriting $\frac{da_2}{dz}(0^+) - \frac{da_2}{dz}(0^-)$, we get, using (8.15) and (8.16),

$$2\varrho^0(0)a_1(0) = \varrho^0(0)\Big(\frac{da_2}{dz}(0^+) - \frac{da_2}{dz}(0^-)\Big) \tag{8.17}$$

$$= -(\lambda_0-1)(\varrho^0(0)a_1(0) - (1+A)a_{1,U}) + (\lambda_0^2-1)a_{0,U}\int_0^{\infty}(\varrho^0-(1+A))\,dz$$

$$-\lambda_1 a_{0,U}(\varrho^0(0)-(1+A)) + (\lambda_0+1)(\varrho^0(0)a_1(0) - (1-A)a_{1,D})$$

$$+(\lambda_0^2-1)a_{0,D}\int_{-\infty}^{0}(\varrho^0-(1-A))\,dz + \lambda_1 a_{0,D}(\varrho^0(0)-(1-A))$$

$$+\frac{\widetilde{\sigma}\lambda_0}{\varrho^0}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big(\varrho^0(0)a_{0,U} - \varrho^0\frac{da_1}{dz}|_{z=0^+} + \varrho^0(0)a_{0,D} + \varrho^0\frac{da_1}{dz}|_{z=0^-}\Big).$$

As

$$\varrho^0\frac{da_1}{dz}|_{z=0^+} = -(\lambda_0-1)a_{0,U}(\varrho^0(0)-(1+A)),$$

$$\varrho^0\frac{da_1}{dz}|_{z=0^-} = -(\lambda_0+1)a_{0,D}(\varrho^0(0)-(1-A)),$$

then the last quantity in terms of σ vanishes using that $a_{0,U} = a_{0,D}$ and $\lambda_0 = A^{-1}$. Replacing a_1 by its expression and using that $\lambda_0 = A^{-1}$, it gives the same expression as in [8.12]. More precisely, we get

$$(1-\lambda_0^2)\Big((1-A)\int_0^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}\,dz + (1+A)\int_{-\infty}^{0}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}\,dz\Big)$$

$$-(1-\lambda_0^2)\Big(\int_0^{+\infty}(\varrho^0-(1+A))\,dz+\int_{-\infty}^0(\varrho^0-(1-A))dz\Big)+2A\lambda_1=0,$$

and we obtain the expression of λ_1 given by (8.14).
Let us now look at the second order and prove that

$$\lambda_2-\lambda_2(\sigma=0)= \tag{8.18}$$

$$\frac{\widetilde{\sigma}\lambda_0}{2A}\left[\begin{array}{l}(\lambda_0+1)\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2dz+\lambda_0\,(\lambda_0-1)\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}dz\\ -(\lambda_0-1)\displaystyle\int_{-\infty}^0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2dz+\lambda_0\,(\lambda_0+1)\int_{-\infty}^0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}dz\end{array}\right]$$

$$+\frac{\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0^2-1)}{2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1+A))}{(\varrho^0)^2}(1-\lambda_0)dz-\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{1}{\varrho^0}dz\\ -\displaystyle\int_{-\infty}^0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1-A))}{(\varrho^0)^2}(\lambda_0+1)dz+\int_{-\infty}^0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{1}{\varrho^0}dz\end{array}\right]$$

where $\lambda_2(\sigma=0)$ is the expression of λ_2 when $\sigma=0$. That means λ_2 depends now directly of the parameter σ.
To derive such expression, we look at the third order in ε. We have for $z>0$:

$$-\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_3}{dz}\Big)-\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}\Big)-\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big)-\widetilde{\sigma}\lambda_2\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_0}{dz}\Big)$$

$$+2\frac{d}{dz}(\varrho^0a_2)+2\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_0\Big)+2\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_1\Big)=$$

$$(\lambda_0+1)\frac{d\varrho^0}{dz}a_2+\lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}a_1+\lambda_2\frac{d\varrho^0}{dz}a_0+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_1+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_0.$$

By using now the expression of ϱ^0da_2/dz and a_1, we get

$$\frac{d}{dz}(\varrho^0\frac{da_3}{dz})+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big)=$$

$$-(\lambda_0-1)\frac{d(\varrho^0a_2)}{dz}-(\lambda_0+1)\Big[-(\lambda_0-1)((1+A)a_{1,U}-\varrho^0a_1)$$

$$-(\lambda_0^2-1)\int_z^{+\infty}a_{0,U}(\varrho^0-(1+A))dz'-\lambda_1((1+A)-\varrho^0)a_{0,U}-\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,U}+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big]$$

$$-\lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}\Big(a_{1,U}+(\lambda_0-1)\int_z^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}a_{0,U}\,dz\Big)$$

$$-\lambda_2\frac{d\varrho^0}{dz}a_0+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2)\Big(a_{1,U}+(\lambda_0-1)\int_z^{+\infty}\frac{\varrho^0-(1+A)}{\varrho^0}a_{0,U}\,dz\Big)$$

$$+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_{0,U}+2\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}.$$

By integrating from z to $+\infty$, we get

$$\varrho^0\frac{da_3}{dz}+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}+\widetilde{\sigma}\lambda_1\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}= \tag{8.19}$$

$$-(1-\lambda_0)((1+A)a_{2,U}-\varrho^0a_2)+(1-\lambda_0^2)\int_z^{+\infty}((1+A)a_{1,U}-\varrho^0a_1)$$

$$-(\lambda_0+1)(\lambda_0^2-1)\int_z^{+\infty}\int_\xi^{+\infty}a_{0,U}(\varrho^0-(1+A))-\lambda_1(\lambda_0+1)\int_z^{+\infty}((1+A)-\varrho^0)a_{0,U}$$

$$-\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0+1)\int_z^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,U}+\widetilde{\sigma}\lambda_0(1-\lambda_0^2)\int_z^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,U}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}$$

$$-\lambda_1(\varrho^0-(1+A))a_{1,U}+\lambda_1(\lambda_0-1)a_{0,U}\int_z^{+\infty}\frac{d\varrho^0}{dz}\int_\xi^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho_0}+\lambda_2((1+A)-\varrho^0)a_{0,U}$$

$$+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{1,U}-\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0-1)a_{0,U}\int_z^{+\infty}\Big[\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\int_\xi^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}\Big]$$

$$+2\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0-1)a_{0,U}\int_z^{+\infty}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}+\widetilde{\sigma}\lambda_1\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,U}.$$

At order 3 at the bottom, we have:

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_3}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_2\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_0}{dz}\Big)$$

$$+2\frac{d}{dz}(\varrho^0a_2)+2\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_0\Big)+2\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_1\Big)=$$

$$-(\lambda_0-1)\frac{d\varrho^0}{dz}a_2-\lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}a_1-\lambda_2\frac{d\varrho^0}{dz}a_0+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_1+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_0.$$

By using the expression of ϱ^0da_2/dz and a_1, we get

$$\frac{d}{dz}\Big(\varrho^0\frac{da_3}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}\Big)+\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big)=$$

$$-(\lambda_0+1)\frac{d(\varrho^0a_2)}{dz}-(\lambda_0-1)\Big[-(\lambda_0+1)((1-A)a_{1,D}-\varrho^0a_1)+(\lambda_0^2-1)\int_{-\infty}^{z}a_{0,D}(\varrho^0-(1-A))$$

$$-\lambda_1((1-A)-\varrho^0)a_{0,D}+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,D}+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}\Big]$$

$$-\lambda_1\frac{d\varrho^0}{dz}\Big(a_{1,D}-(\lambda_0+1)\int_{-\infty}^{z}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}a_{0,D}\Big)$$

$$-\lambda_2\frac{d\varrho^0}{dz}a_0-\widetilde{\sigma}\lambda_0\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)\Big(a_{1,D}-(\lambda_0+1)\int_{-\infty}^{z}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}\,a_{0,D}\Big)$$

$$-\widetilde{\sigma}\lambda_1\frac{d}{dz}\Big(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\Big)a_{0,D}-2\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}.$$

By integrating from $-\infty$ to z, we get

$$-\varrho^0\frac{da_3}{dz}-\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_2}{dz}-\widetilde{\sigma}\lambda_1\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{da_1}{dz}= \tag{8.20}$$

$$(\lambda_0+1)(\varrho^0a_2-(1-A)a_{2,D})+(\lambda_0^2-1)\int_{-\infty}^{z}(\varrho^0a_1-(1-A)a_{1,D})+(\lambda_0-1)(\lambda_0^2-1)$$

$$\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\xi}a_{0,D}(\varrho^0-(1-A))+\lambda_1(\lambda_0-1)\int_{-\infty}^{z}(\varrho^0-(1-A))a_{0,D}$$

$$+\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0-1)\int_{-\infty}^{z}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,D}-\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0^2-1)\int_{-\infty}^{z}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,D}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}$$

$$+\lambda_1(\varrho^0-(1-A))a_{1,D}-\lambda_1(\lambda_0+1)a_{0,D}\int_{-\infty}^{z}\frac{d\varrho^0}{dz}\int_{-\infty}^{\xi}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}+\lambda_2(\varrho^0-(1-A))a_{0,D}$$

$$+\widetilde{\sigma}\lambda_0\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{1,D}-\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0+1)a_{0,D}\int_{-\infty}^{z}\Big[\frac{d}{dz}(\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2)\int_{-\infty}^{\xi}\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}\Big]$$

$$-2\widetilde{\sigma}\lambda_0(\lambda_0+1)a_{0,D}\int_{-\infty}^{z}\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}+\widetilde{\sigma}\lambda_1\Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2a_{0,D}.$$

By using the expressions involving λ_2, we obtain what we announced in (8.18).

In the same calculation time, we can also get the σ-independent part of λ_2 which is given by the following relation

$$-2Aa_0\lambda_2(\sigma=0)=\frac{1-A^2}{A}\big(a_{2,U}-a_{2,D}\big)_{\sigma=0}+A\lambda_1(a_{1,U}+a_{1,D}).$$

$$+(1-\lambda_0^2)\Big[\int_0^{+\infty}((1+A)a_{1,U}-\varrho^0a_1)-\int_{-\infty}^{0}\big(\varrho^0a_1-(1-A)a_{1,D}\big)\Big]$$

$$+a_0(1-\lambda_0^2)\Big[(\lambda_0+1)\int_0^{+\infty}\int_z^{+\infty}\big(\varrho^0-(1+A)\big)-(\lambda_0-1)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}\big(\varrho^0-(1-A)\big)\Big]$$

$$+a_0\lambda_1\Big[\int_0^{+\infty}\frac{(1+A)-\varrho^0}{\varrho^0}-\int_{-\infty}^{0}\frac{\varrho^0-(1-A)}{\varrho^0}$$

$$-(\lambda_0+1)\int_0^{+\infty}\big((1+A)-\varrho^0\big)+(\lambda_0-1)\int_{-\infty}^{0}\big(\varrho^0-(1-A)\big)$$

$$+(\lambda_0-1)\int_0^{+\infty}\frac{d\varrho^0}{dz}\int_z^{+\infty}\frac{\varrho^0-(1+A)}{\varrho^0}-(\lambda_0+1)\int_{-\infty}^0\frac{d\varrho^0}{dz}\int_{-\infty}^z\frac{\varrho^0-(1-A)}{\varrho^0}\Bigg]$$

where

$$\big(a_{2,U}-a_{2,D}\big)_{\sigma=0}=$$

$$(\lambda_0-1)\int_0^{+\infty}\frac{(1+A)a_{1,U}-\varrho^0a_1}{\varrho^0}-(\lambda_0+1)\int_{-\infty}^0\frac{\varrho^0a_1-(1-A)a_{1,D}}{\varrho^0}$$

$$+a_0(\lambda_0^2-1)\Bigg[\int_0^{+\infty}\frac{1}{\varrho^0}\int_z^{+\infty}\big(\varrho^0-(1+A)\big)-\int_{-\infty}^0\frac{1}{\varrho^0}\int_{-\infty}^z\big(\varrho^0-(1-A)\big)\Bigg]$$

$$+a_0\lambda_1\Bigg[\int_0^{+\infty}\frac{(1+A)-\varrho^0}{\varrho^0}-\int_{-\infty}^0\frac{\varrho^0-(1-A)}{\varrho^0}\Bigg].$$

8.5. Low Atwood number limit for linear density profiles

In this part, we address the Rayleigh-Taylor instability in the framework of linear density profiles and we derive the asymptotic expressions of the growth rate when the Atwood number goes to zero.

This analysis is of particular interest in the framework of direct numerical simulation of Rayleigh Taylor instabilities. As a matter of fact, prior to launching large computations, elementary evaluation of the code's behavior has to be done. More precisely, one important problem is to estimate for a given mesh size the wave number range in which the growth rate is correctly computed. Asymptotically analytical solutions in the limit of small Atwood numbers provide such quantitative references.

We consider a non dimensional continuous density profile connecting two constant densities away from a transition zone located in the neighborhood of $z=0$, given by

$$\varrho^0=\begin{cases}1+A & \text{if } z\geq A\\ 1+z & \text{if } |z|\leq A\\ 1-A & \text{if } z\leq -A\end{cases}$$

Looking at the behavior when $A\to 0$ we obtain:

$$\lambda_1=\frac{2}{3}+o(A)$$

$$\lambda_2(\sigma=0)=\frac{4}{45}A+o(A)$$

$$\lambda_2=\lambda_2(\sigma=0)+\tilde{\sigma}\Big(\frac{4}{3A}+\frac{4A}{15}+o(A)\Big)$$

Let's now come back to the asymptotic behavior of $\dfrac{\gamma^2}{gk}$ with respect to $k=\dfrac{\varepsilon}{\ell}$ and see the influence of surface tension.

$$\frac{\gamma^2}{gk}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_0}\Big[1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\varepsilon-\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}-\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^2}\Big)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\Big].$$

Since

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma(\varrho_U^0 + \varrho_D^0)}{2g\ell^3},$$

we obtain

$$\frac{\gamma^2}{gk} \approx A\Big[1 - \frac{2\sigma(\varrho_U^0 + \varrho_D^0)}{3g\ell}k^2\Big].$$

Choosing

$$\sigma = \frac{3T_s}{2(\varrho_U^0 - \varrho_D^0)^2}A\ell, \tag{8.21}$$

we get exactly

$$\frac{\gamma^2}{gk} = A - \frac{T_s}{g(\varrho_2 + \varrho_1)}k^2$$

Finally let us recall that the energy concentrated at the interface is interpreted as the surface tension. It depends on the pressure law that is considered and is found looking at the equation (8.7). The reader interested in a modeling paper on this subject is referred to [8.21].
We recall that analytic solutions of the Rayleigh equation without surface tension for linear profiles have been studied in [8.11].

8.6. Some known results on the compressible Korteweg system

Few works consider the diffuse interface model in the literature as far as Rayleigh–Taylor or Richtmyer–Meshkov instabilities are concerned. We try there to describe briefly different works devoted to stability results. In [8.1], the problems of internal waves in quasi-critical fluids is addressed. The interface is represented by a transition zone with regular density. The static density profiles, frequencies of the internal waves are computed and compared to experiments. In [8.3], the author studies the linear stability on a transition phase problem for non viscous capillary fluids of Van der Waals type. Two results are obtained: the capillary profiles are weakly linearly stable in any space dimensions, by using an energy method; the technique of Evans functions shows a bifurcation phenomenon close to the origin. In [8.26], the stability and instability of oscillations of amplitudes $O(1)$ in a Van der Waals fluid of Korteweg type is investigated. The author obtains then some asymptotic models by letting the capillarity and viscosity coefficient go to zero with the same order of magnitude. Solutions with a given profile are considered but no assumptions on the structure of oscillations are made. The analysis is globally formal with some points rigorously justified. The main order is a system of three conservation laws. Indeed, a new variable has to be introduced to close the final system. The other terms are solutions of a linear system. Readers interested by recent mathematical results around Korteweg model is referred to [8.5], [8.6], [8.4], [8.25], [8.14], [8.19] and [8.7]. It could be interesting using such recent results to investigate again the stability and instability of oscillations of amplitudes $O(1)$.

Acknowledgments: The first author would like to thank the CEA/DAM (Bruyères le Châtel, France) for its financial support through the contract No 4600052302/P6H28. He is also partially supported by the IDOPT project in Grenoble and the "ACI jeunes chercheurs 2004" du ministère de la Recherche "Études mathématiques de paramétrisations en océanographie".

Appendix: Ansatz

We need the following integrals appearing in the expressions of λ_1 and λ_2:

$$\int_0^\infty \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 = A \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 = A$$

$$\int_0^\infty \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 \frac{1}{\varrho^0} = \ln(1+A) \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 \frac{1}{\varrho^0} = -\ln(1-A)$$

$$\int_0^\infty \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 \frac{1}{(\varrho^0)^2} = \frac{A}{1+A} \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \Big|\frac{d\varrho^0}{dz}\Big|^2 \frac{1}{(\varrho^0)^2} = \frac{A}{1-A}$$

$$\int_0^\infty (1+A) - \varrho^0 = \frac{A^2}{2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \varrho^0 - (1-A) = \frac{A^2}{2}$$

$$\int_0^\infty \int_z^\infty \varrho^0 - (1+A) = -\frac{A^3}{6} \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z \varrho^0 - (1-A) = \frac{A^3}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{\varrho^0 - (1+A)}{\varrho^0} = A - (1+A)\ln(1+A)$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\varrho^0 - (1-A)}{\varrho^0} = A + (1-A)\ln(1-A)$$

$$\int_0^\infty (1+A)a_{1,U} - \varrho^0 a_1 = \frac{A^2}{2} a_{1,U} - a_0 \frac{1-A}{2A}\Big(\frac{A^3}{3} - A + (1+A)\Big(\ln(1+A) - \frac{A^2}{2}\Big)\Big)$$

$$\int_{-\infty}^0 \varrho^0 a_1 - (1-A)a_{1,D} = \frac{A^2}{2} a_{1,D} - a_0 \frac{1+A}{2A}\Big(-\frac{A^3}{3} + A + (1-A)\Big(\ln(1-A) - \frac{A^2}{2}\Big)\Big)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\varrho^0} \int_z^\infty \varrho^0 - (1+A) = \frac{3A^2}{4} + \frac{A}{2} - \frac{(1+A)^2}{2}\ln(1+A)$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\varrho^0} \int_{-\infty}^z \varrho^0 - (1-A) = \frac{3A^2}{4} - \frac{A}{2} - \frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A)$$

$$K^+ = \int_0^\infty \frac{d\varrho^0}{dz} \int_z^\infty \frac{\varrho^0 - (1+A)}{\varrho^0} = -\frac{A^2}{2} - A + (1+A)\ln(1+A)$$

$$K^- = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\varrho^0}{dz} \int_{-\infty}^{z} \frac{\varrho^0 - (1-A)}{\varrho^0} = -\frac{A^2}{2} + A + (1-A)\ln(1-A)$$
$$\int_0^\infty \frac{(1+A)a_{1,U} - \varrho^0 a_1}{\varrho^0} = a_{1,U}\big((1+A)\ln(1+A) - A\big) - a_0 \frac{1-A}{A} K^+$$
$$\int_{-\infty}^0 \frac{\varrho^0 a_1 - (1-A)a_{1,D}}{\varrho^0} = a_{1,D}\big((1-A)\ln(1-A) + A\big) - a_0 \frac{1+A}{A} K^-$$

First of all, let's look at λ_1, starting with its integral expression given in the preceding section:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1-A^2}{2A^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 - (\varrho^0 - 1)^2}{\varrho^0} dz \\
&= \frac{1-A^2}{2A^3} \int_{-A}^{A} \frac{A^2 - z^2}{z+1} \\
&= \frac{1-A^2}{2A^3} \int_{-A}^{A} \frac{A^2 - 1 - (z+1)^2 + 2(z+1)}{z+1} \\
&= \frac{1-A^2}{2A^3} \Big[(A^2-1)\big(\ln(1+A) - \ln(1-A)\big) - \frac{(1+A)^2 - (1-A)^2}{2} + 4A \Big] \\
&= \frac{1-A^2}{2A^3} \Big[(A^2-1)\big(\ln(1+A) - \ln(1-A)\big) + 2A \Big] \\
&= \frac{1-A^2}{2A^3} \Big[\frac{4A^3}{3} + \frac{4A^5}{15} + o(A^5) \Big] \\
&= \frac{2}{3} - \frac{8A^2}{15} + o(A^2)
\end{aligned}$$

For the σ-dependent part of λ_2 we obtain

$$\begin{aligned}
\lambda_2 - \lambda_2(\sigma = 0) = \frac{\tilde\sigma}{2A^2} \Big[& \Big(\frac{1}{A} + 1\Big)A + \frac{1}{A}\Big(\frac{1}{A} - 1\Big)\Big(A - (1+A)\ln(1+A)\Big) \\
& - \Big(\frac{1}{A} - 1\Big)A + \frac{1}{A}\Big(\frac{1}{A} + 1\Big)\Big(A + (1-A)\ln(1-A)\Big)\Big] \\
+ \frac{\tilde\sigma(1-A^2)}{2A^3} \Big[& \Big(1 - \frac{1}{A}\Big)\Big(\ln(1+A) - A\Big) - \ln(1+A) \\
& - \Big(1 + \frac{1}{A}\Big)\Big(-\ln(1-A) - A\Big) - \ln(1-A)\Big] \\
= \frac{\tilde\sigma}{A} \Big[& 1 + \frac{1}{A^2} + \frac{1-A^2}{A^3}\big(A + \ln(1-A) - \ln(1+A)\big)\Big] \\
= \frac{\tilde\sigma}{A} \Big[& 1 + \frac{1}{A^2} + \frac{1-A^2}{A^3}\big(-A - \frac{2A^3}{3} - \frac{2A^5}{5} + o(A^6)\big)\Big] \\
= \frac{\tilde\sigma}{A} \Big[& \frac{4}{3} + \frac{4A^2}{15} + o(A^3)\Big] \\
= \tilde\sigma \Big[& \frac{4}{3A} + \frac{4A}{15} + o(A^2)\Big].
\end{aligned}$$

And for the part which does not depend on σ:

$$
\begin{aligned}
-2Aa_0\lambda_2(\sigma=0) = \frac{1-A^2}{A}\Bigg[&\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\Big[a_{1,U}\Big((1+A)\ln(1+A)-A\Big)\\
&\qquad -a_0\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\Big(-\frac{A^2}{2}-A+(1+A)\ln(1+A)\Big)\Big]\\
&-\Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big[a_{1,D}\Big((1-A)\ln(1-A)+A\Big)\\
&\qquad -a_0\Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big(-\frac{A^2}{2}+A+(1-A)\ln(1-A)\Big)\Big]\\
&+a_0\Big(\frac{1}{A^2}-1\Big)\Big[\frac{A}{2}+\frac{3A^2}{4}-\frac{(1+A)^2}{2}\ln(1+A)\\
&\qquad +\frac{A}{2}-\frac{3A^2}{4}+\frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A)\Big]\\
&+a_0\lambda_1\Big[-A+(1+A)\ln(1+A)-A-(1-A)\ln(1-A)\Big]\Bigg]\\
&+A\lambda_1(a_{1,U}+a_{1,D})\\
&+\Big(1-\frac{1}{A^2}\Big)\Big[\frac{A^2}{2}(a_{1,U}-a_{1,D})\\
&\qquad -a_0\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\Big(\frac{A^3}{6}-\frac{A}{2}+\frac{1+A}{2}\ln(1+A)\Big)\\
&\qquad +a_0\Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big(-\frac{A^3}{6}+\frac{A}{2}+\frac{1-A}{2}\ln(1-A)\Big)\Big]\\
&+a_0\Big(1-\frac{1}{A^2}\Big)\Big[-\frac{A^3}{6}\Big(\frac{1}{A}+1\Big)-\frac{A^3}{6}\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\Big]\\
&+a_0\lambda_1\Big[-A+(1+A)\ln(1+A)-A-(1-A)\ln(1-A)\\
&\qquad -\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{A}+1\Big)+\frac{A^2}{2}\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\\
&\qquad +\Big(\frac{1}{A}-1\Big)\Big(-\frac{A^2}{2}+(1+A)\ln(1+A)-A\Big)\\
&\qquad -\Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big(-\frac{A^2}{2}+(1-A)\ln(1-A)+A\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

And after some calculations we get

$$
\begin{aligned}
-2Aa_0\lambda_2(\sigma=0) = &\frac{1-A^2}{A}\Big[(a_{1,U}-a_{1,D})\Big(\frac{A}{2}+\frac{1-A^2}{2A}\big(\ln(1+A)+\ln(1-A)\big)\Big)\Big]\\
&+\frac{1-A^2}{A}a_0\Big[\frac{2}{A}-\frac{A}{3}+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{A^2}+\frac{A^2}{2}\Big)\big(\ln(1+A)-\ln(1-A)\big)\Big]\\
&+a_0\lambda_1\Big[\Big(1+\frac{1}{A}-A\Big)\Big(-2A+(1+A)\ln(1+A)-(1-A)\ln(1-A)\Big)\\
&\qquad -2+\frac{1-A^2}{A}\big(\ln(1+A)-\ln(1-A)\big)\Big]
\end{aligned}
$$

with

$$\begin{aligned}
a_{1,U} - a_{1,D} &= a_0\Big((-\lambda_0+1)\int_0^{+\infty}\frac{(\varrho^0-(1+A))}{\varrho^0}dz - (\lambda_0+1)\int_{-\infty}^0\frac{(\varrho^0-(1-A))}{\varrho^0}\,dz\Big)\\
&= a_0\Big[\Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big(A-(1+A)\ln(1+A)\Big) - \Big(\frac{1}{A}+1\Big)\Big(A+(1-A)\ln(1-A)\Big)\Big]\\
&= a_0\Big[-2+\frac{1-A^2}{A}\big(\ln(1+A)-\ln(1-A)\big)\Big]\\
&= a_0\Big[-\frac{4A^2}{3}-\frac{4A^4}{15}+o(A^4)\Big].
\end{aligned}$$

Putting together all these expressions we finally get the following ansatz:

$$-2Aa_0\lambda_2(\sigma=0) =$$

$$a_0\frac{1-A^2}{A}\left[\begin{array}{c}\Big(-\frac{4A^3}{3}-\frac{4A^4}{15}+o(A^4)\Big)\Big(\frac{A}{2}-\frac{1-A^2}{2A}\Big(A^2+\frac{A^4}{2}+o(A^4)\Big)\Big)\\ +\frac{2}{A}-\frac{A}{3}+\Big(-\frac{1}{A^2}+\frac{1}{2}+\frac{A^2}{2}\Big)\Big(2A+\frac{2A^3}{3}+\frac{2A^5}{5}+o(A^6)\Big)\end{array}\right]$$

$$+a_0\Big[\frac{2}{3}-\frac{8A^2}{15}+o(A^2)\Big]\left[\begin{array}{c}\Big(\frac{1}{A}+1-A\Big)\Big(-\frac{A^3}{3}+o(A^3)\Big)\\ -2+\frac{1-A^2}{A}\Big(2A+\frac{2A^3}{3}+o(A^3)\Big)\end{array}\right]$$

which gives

$$\lambda_2(\sigma=0) = \frac{4A}{45}+o(A)$$

References

[8.1] D.M. Anderson, G.B. McFadden, A diffusive-interface description of internal waves in a near-critical fluid. *Phys. Fluids* 9 (7), (1997), 1870–1879.

[8.2] S. Benzoni-Gavage, Linear stability of propagating phase boundaries in capillary fluids. *Physica D,* 155, (2001), 235–273.

[8.3] S. Benzoni-Gavage, Stability of multi-dimensional phase transitions in a Van der Waals fluid. *Nonlinear Analysis, TMA,* 31, No 1/2, (1998), 243–261.

[8.4] S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes, D. Jamet. Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces, *Interfaces Free Boundaries,* 7, 371-414 (2005).

[8.5] S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes. Well-posedness of one-dimensional Korteweg models, *Electronic Journal of Differential Equations,* 59, 1-35 (2006).

[8.6] S. Benzoni, R. Danchin, S. Descombes. On the well-posedness of the Euler-Korteweg model in several space dimensions, *Indiana University Mathematics Journal,* to appear (2007).

[8.7] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Comm. Partial Diff. Eqs,* **28**, No. 3-4, (2003), 1009–1037.

[8.8] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Commun. Math. Phys.* 238 (2003) 1-2, 211-223.

[8.9] P. Carlès, S. Popinet, The effect of viscosity, surface tension and non-linearity on Richtmyer-Meshkov instability. *Eur. J. Mech. B Fluids* 21 (2002), no. 5, 511–526.

[8.10] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Dover Publications, Inc. New York, (1981).

[8.11] C. Cherfils-Clérouin, O. Lafitte, Analytic solutions of the Rayleigh equation for linear density profiles , *Physical review E,* **62**, (2000), no. 1, 2967–2970.

[8.12] C. Cherfils-Clérouin, O. Lafitte, P.–A. Raviart, Asymptotic results for the linear stage of the Rayleigh-Taylor Instability *Mathematical fluid mechanics,* 47–71, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhauser, Basel, (2001).

[8.13] D. Coutand, S. Shkoller, Unique solvability of the free boundary Navier-Stokes equations with surface tension. Submitted (2003).

[8.14] R. Danchin, B. Desjardins. Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type. *Annales de l'IHP, Analyse Non Linaire,* 18, pages 97-133 (2001)

[8.15] T. Erneux, S.H. Davis, Nonlinear rupture of free films. *Physics of fluids A, fluid dynamics,* **5**, (1993), 1117–1122.

[8.16] G.P. Galdi, D.D. Joseph, L. Preziosi, S. Rionero, Mathematical problems for miscible incompressible fluids with Korteweg stresses. *Eur. J. Mech. B/Fluids,* **10**, (1991), 253–267.

[8.17] G.P. Galdi, M. Padula, K.R. Rajagopal, On the nonlinear stability of flows of granular materials. *Recent Advances in Mechanics of Structured Media (AMD)* Vol. 117, p.61–64, (1991).

[8.18] E. Frolova, M. Padula, Free boundary problem for a layer of inhomogeneous fluid. *Eur. J. Mech. B/Fluids,* 23, no.4, (2004), 665–679.

[8.19] H. Hattori, D. Li, The existence of global solutions to a fluid dynamic model for materials for Korteweg type. *J. Partial Differential Equations* 9 (1996), no. 4, 323–342.

[8.20] B. Helffer, O. Lafitte, Asymptotic methods for the Rayleigh equation for the linearized Rayleigh-Taylor instability. Preprint Université Paris-Sud, Mathématiques, No (2002)-20.

[8.21] D. Jamet, Diffuse interface models in fluid mechanics. GdR CNRS documentation, see pmc.polytechnique.fr/mp/GDR/docu/Jamet.pdf

[8.22] K.O. Mikaelian, Growth rate of the Richtmyer-Meshkov at schoked interfaces. *Phys Rev letters,* vol. 17, no 18, (1993).

[8.23] K.O. Mikaelian, Rayleigh-Taylor and Richtmer-Meshkov instabilities in multilayers; fluids with surface tension. *Phys. Rev. A,* vol. 42, no 12, (1990), 7211–7225.

[8.24] K.O. Mikaelian, Rayleigh-Taylor instability in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension. *Phys. Rev. E,* vol. 54, no 4-A, (1996), 3676–3680.

[8.25] C. Rohde. On local and non-local Navier-Stokes-Korteweg systems for liquid-vapour phase transitions. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 85* (2005), no. 12, 839–857.

[8.26] D. Serre, Entropie du mélange liquide-vapeur d'un fluide thermo-capillaire. *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), no. 1, 33–73.